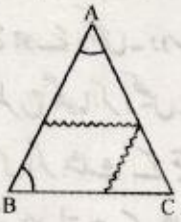
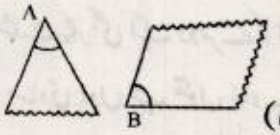
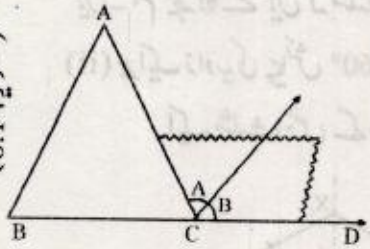
کہ $\angle A$ ایک حصے پر اور $\angle B$ دوسرے حصے پر ہو۔ (تصویر 6.13)



(تصویر 6.12)



(تصویر 6.13)



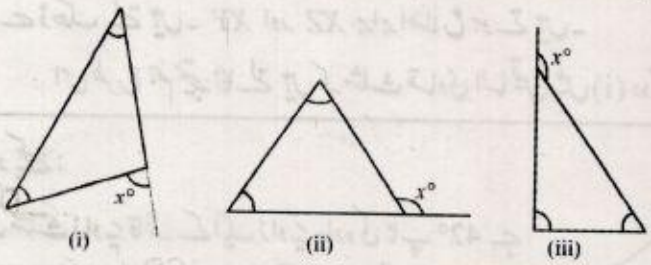
(تصویر 6.14)

اب $\angle A$ اور $\angle B$ کو ملا کر $\angle ACD$ پر رکھئے۔ کیا یہ دونوں زاویے $\angle ACD$ کو پوری طرح ڈھک لیتے ہیں؟ تصویر 6.14 کو دیکھنے سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ $\angle A$ اور $\angle B$ ایک ساتھ مل کر $\angle ACD$ کو پوری طرح ڈھک لیتے ہیں۔

تب $m\angle ACD = m\angle A + m\angle B$ یعنی کسی مثلث کا زاویۂ خارجہ اپنے دونوں متقابل زاویۂ داخلہ کے جوڑ کے برابر ہوتا ہے؟

خود کر کے دیکھئے:

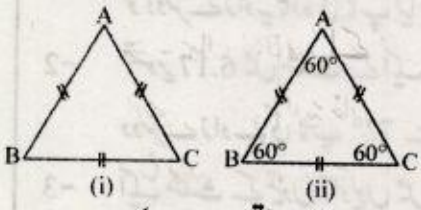
1- نیچے دیئے گئے مثلثوں میں دیئے گئے زاویۂ خارجہ اور اُس سے متعلق متقابل زاویۂ داخلہ کو ناپئے اور اس اصول کی جانچ کیجئے اور x کی قیمت معلوم کیجئے۔



مثلث کے زاویہ اور ضلع میں رشتہ

دو خاص مثلث: مثلث متساوی الاضلاع اور متساوی الساقین

ایک مثلث، جس کے تینوں ضلع کی ناپ برابر ہو، مثلث متساوی الاضلاع کہلاتا ہے۔

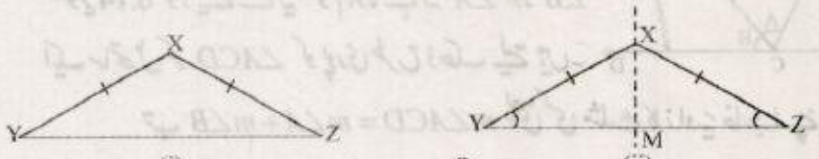


(تصویر 6.14)

ایک مثلث متساوی الاضلاع ABC (تصویر 6.15) بنایئے۔ اس کا متبادل یعنی اسی ناپ کا

ایک اور مثلث متساوی الاضلاع کاغذ سے کاٹئے۔ پہلے مثلث کو غیر متحرک رکھتے ہوئے اس پر دوسرا مثلث اسے ڈھکتے ہوئے رکھیں۔ دوسرا مثلث پہلے کو پوری طرح ڈھک لیتا ہے۔ دوسرے مثلث کو پہلے مثلث پر کسی بھی طرح گھوما کر رکھیں۔ وہ دونوں مثلث پھر بھی ایک دوسرے کو ڈھک لیتے ہیں۔ کیا آپ دیکھ پاتے ہیں کہ اگر مثلث کے تینوں اضلاع مساوی ہوں تب تینوں زاویے بھی مساوی ناپ کے ہوتے ہیں۔ ہم نتیجہ نکالتے ہیں کہ مثلث متساوی الاضلاع میں (i) تینوں اضلاع مساوی ناپ کے ہوتے ہیں۔ (ii) ہر ایک زاویہ کی پیمائش $60°$ ہوتی ہے۔

ایک مثلث، جس کے دو اضلاع کی ناپ مساوی ہو ایک مثلث متساوی الساقین کہلاتا ہے۔

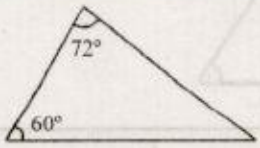


(تصویر 6.16)

کاغذ کے ٹکڑے سے ایک مثلث متساوی الاضلاع XYZ تراشئے، جس میں ضلع XY = ضلع XZ ہو (تصویر 6.16)۔ اسے اس طرح موڑیئے جس سے راس Z راس Y پر منطبق ہو۔ اب X سے گزرنے والا خط XM اس مثلث کا تشاکل محور ہے۔ آپ دیکھتے ہیں کہ $\angle Y$ اور $\angle Z$ ایک دوسرے کو پورے طور سے ڈھک لیتے ہیں۔ XY اور XZ برابر اضلاع ہوتے ہیں۔

اس طرح ہم نتیجہ نکالتے ہیں کہ مثلث متساوی الساقین میں (i) دو ضلع برابر لمبائی کی ہوتی ہے۔

خود کر کے دیکھئے:



(تصویر 6.17)

1- ایک مثلث زاویۂ قائمہ کے ایک زاویۂ حادہ کی ناپ $42°$ ہے تو دوسرے زاویہ مادہ کی ناپ کیا ہوگی؟

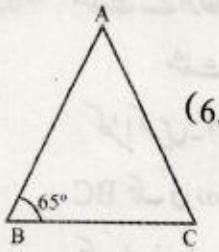
2- تصویر 6.17 میں مثلث کے ایک زاویہ کی ناپ $60°$ اور دوسرے زاویے کی ناپ $72°$ ہے تب تیسرے زاویہ کی ناپ معلوم کیجئے۔

3- ایک مثلث کے تینوں زاویوں میں نسبت 3:4:5 ہے۔ زاویوں کی ناپ معلوم کیجئے۔

4- ایک مثلث زاویۂ قائمہ کے دونوں زاویۂ حادہ مساوی ہیں۔ دونوں زاویۂ حادہ کی ناپ معلوم کیجئے۔

(ii) مساوی ضلعوں کے سامنے کا زاویہ مساوی ہوتا ہے۔

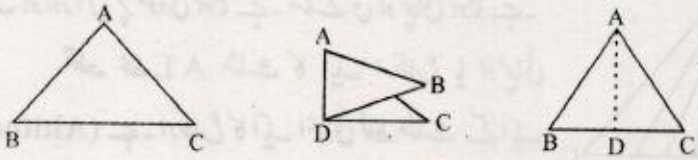
5- تصویر 6.18 میں $AB = AC$ اور $\angle ABC = 65°$ تب مثلث کے باقی دونوں زاویوں کی ناپ معلوم کیجئے۔



(تصویر 6.17)

6.3- مثلث کا وسطانیہ (Median of a Triangle)

کاغذ کے ٹکڑے سے ایک مثلث ABC تراشیے۔



(تصویر 6.19)

اس کے راس B کو راس C پر رکھ کر موڑیئے۔ جس سے BC ضلع کو دو برابر حصوں میں تقسیم کیا گیا ہے۔ اور D نقطہ کو ضلع BC کے وسط پر دکھایا گیا ہے۔ اب راس A سے D کو ملایا گیا ہے۔ یہی مثلث کا خط وسطانیہ ہے۔ کیا آپ A B اور A C ضلع پر بھی خط وسطانیہ کھینچ سکتے ہیں؟ ہاں کھینچ سکتے ہیں۔ مثلث میں کل 3 خط وسطانیہ ہوتے ہیں، جو مثلث کے تینوں راسوں سے سامنے والے ضلعوں پر کھینچے جا سکتے ہیں۔

مثلث میں کسی ضلع کے نقطہ وسط کو مخالف راس سے ملانے والا خط ہی مثلث کا خط وسطانیہ ہے۔ تینوں خط وسطانیہ ایک دوسرے کو جس نقطہ پر کاٹتے ہیں وہ نقطہ مثلث کا مرکز ثقل (Centroid) کہلاتا ہے۔

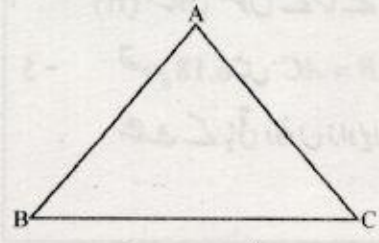
کچھ کریں:

ایک مثلث میں تینوں خط وسطانیہ کھینچئے اور بتایئے:

(i) کیا تینوں خط وسطانیہ ہم نقطہ ہوتے ہیں یعنی ایک ہی نقطہ سے گزرتے ہیں؟

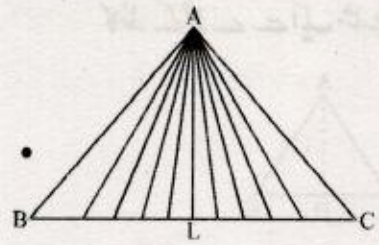
(ii) کیا ایک خط وسطانیہ پورے طور سے مثلث کے اندر ہوتا ہے؟ اگر آپ کے مطابق یہ سچ نہیں ہو تو اس حالت کو دکھانے کے ایک خاکہ کھینچئے۔

6.4- مثلث کے ارتفاع (Altitude of a Triangle)



(تصویر 6.20)

مثلث کی ساخت والے گتے کو ہموار زمین پر سیدھا کھڑا کریں۔ اس کی اونچائی کتنی ہے؟ یہ اونچائی راس A سے ضلع BC تک کی دوری ہے (تصویر 6.20)۔ راس A سے ضلع BC تک بہت سارے قطعہ خط کھینچے جا سکتے ہیں (تصویر 6.21)۔ ان میں سے مثلث کی اونچائی کون سا قطعہ خط ظاہر کرتی ہے؟



(تصویر 6.21)

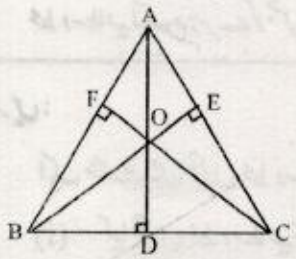
وہ قطعہ خط جو راس A سے سیدھا کھڑا نیچے BC تک ہو اور اس پر عمودی ہوتا ہے۔ مثلث کی اونچائی ہوتا ہے۔

قطعہ خط AL مثلث کا ایک ارتفاع یا اونچائی (Altitude) ہے۔ ارتفاع کا ایک انتہائی نقطہ مثلث کے ایک راس پر اور دوسرا انتہائی نقطہ ضلع اس راس کے مقابل پر واقع ہوتا ہے۔ ہر ایک راس سے ایک خط ارتفاع کھینچا جا سکتا ہے۔

تصویر 6.21 کو دیکھئے مثلث ABC میں راس A سے ضلع BC پر بہت سارے قطعہ خط کھینچے گئے ہیں۔ غور کیجئے سب سے چھوٹی لمبائی کا قطعہ خط کون ہوگا؟

AL راس A سے ضلع BC پر کھینچے گئے مختلف لمبائی کے قطعہ خطوط میں سب سے چھوٹا قطعہ خط ہے۔ AL راس A سے ضلع BC پر ڈالا گیا عمود ہے۔

ایک مثلث میں تین خط ارتفاع ہوتے ہیں۔ ہر ایک راس سے سامنے کے ضلع پر ایک ایک خط عمود کھینچا جا سکتا ہے، جو خطوط ارتفاع ہیں۔



(تصویر 6.22)

تصویر 6.22 میں AD، BE اور CF مثلث ABC کے تین خطوط ارتفاع ہیں۔ تینوں خطوط ارتفاع ایک نقطہ پر مل رہے ہیں۔ یہ نقطہ ہی مثلث کا ارتفاعی مرکز (Ortho Centre) ہے۔

خود کر کے دیکھئے:

-1 ایک مثلث میں کتنے ارتفاع ہوتے ہیں؟

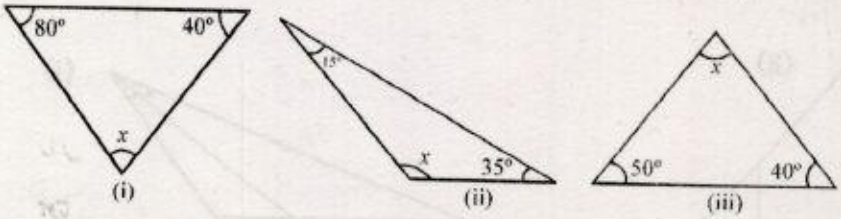
-2 کیا کسی مثلث میں خط وسطانیہ اور مثلث کا خط ارتفاع ایک قطعہ خط ہو سکتا ہے؟

-3 مثلث کے خط ارتفاع کا ایک انتہائی نقطہ مثلث کے راس پر ہوتا ہے۔ بتایئے دوسرا انتہائی نقطہ کہاں ہوگا؟

-4 کیا کسی مثلث کے دو اضلاع اور اس کے خطوط ارتفاع ہو سکتے ہیں؟ اگر ہاں تو وہ مثلث کیسا ہوگا؟

سوالنامہ : 6.1

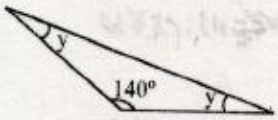
-1 x کی قیمت معلوم کیجئے۔



-2 ایک مثلث زاویۂ قائمہ کا ایک زاویۂ حادہ 35° کا ہے تو دوسرے زاویۂ حادہ کی قیمت معلوم کیجئے۔

-3 ایک مثلث متساوی الاضلاع کے تینوں زاویہ کی ناپ کیا ہوگی؟

-4 تصویر 6.23 کے مطابق ذیل کے سوالوں کے جواب دیجئے:



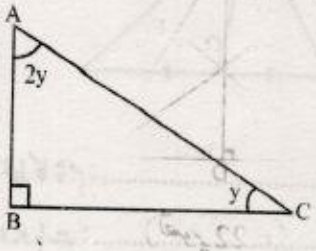
(تصویر 6.23)

(i) y کی قیمت بتایئے۔ (ii) مثلث کی قسم بتایئے۔

-5 ایک مثلث کا پہلا زاویہ دوسرے اور تیسرے زاویہ کی ناپ کے جوڑ کے برابر ہے اور دوسرے زاویہ اور تیسرے زاویہ کی ناپ برابر ہے۔ اس مثلث کو آپ کیا نام دیں گے؟

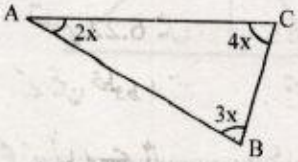
نیچے دیئے گئے مثلثوں میں نامعلوم زاویوں کی ناپ معلوم کیجئے:

-6



$\angle C =$ .....

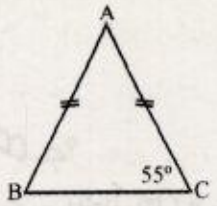
-8



$\angle B =$ .....

$\angle C =$ .....

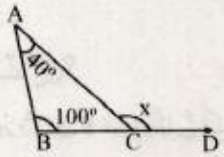
-8



$\angle A =$ .....

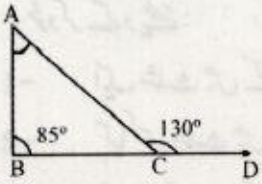
$\angle B =$ .....

-9



$x =$ .....

-10



$\angle A =$ .....

-11 نیچے دیئے گئے مثلثوں کے اندر دکھائی گئی ٹوٹی لائن (Dotted Lines) کے نام لکھئے۔ ساتھ میں وجوہات بھی لکھئے۔

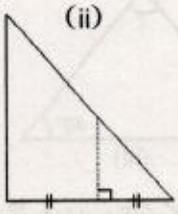
(i)

خط کا نام: زاویہ ناصف (Angle bisector)

وجوہات: .....

.....

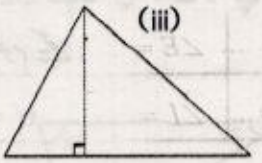
(ii)



خط کا نام: قاعدہ کا عمودی ناصف (Perpendicular bisector)

وجوہات: کیوں کہ یہ قاعدہ دو برابر حصوں میں بانٹتا ہے اور قاعدہ پر عمود ہے۔

(iii)

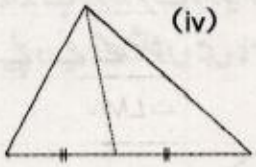


خط کا نام: .....

وجوہات: .....

.....

(iv)



خط کا نام: .....

وجوہات: .....

.....

-12 ایک ایسا مثلث (کچی تصویر) بنایئے۔ جس کے ایک راس سے کھینچا گیا عمود مثلث کے باہر واقع ہو۔ آپ نے کیسا مثلث بنایا؟ مثلث زاویۂ حادہ، مثلث زاویۂ قائمہ، مثلث زاویۂ منفرجہ یا دوسرا؟

-13 نیچے ایک مثلث متساوی الاساقین ABC بنایئے، جس میں $AB = AC$ ہو۔ اس مثلث میں درج ذیل خط بنایئے:

(i) زاویہ A کے لیے ناصف(Bisector)

(ii) راس A کے سامنے والے ضلع پر عمود

(iii) راس A کے سامنے والے ضلع پر خط وسطانیہ

اب بتایئے:

(i) کیا یہ سبھی خطوط الگ الگ ہیں یا نہیں؟

(ii) ان خطوط کی کیا خصوصیات ہیں؟

-14 ایک مثلث میں کسی ایک زاویہ کا خط ناصف(Bisector) اس کی ایک ارتفاعی خط بھی ہے۔ بتاؤ، مثلث کس طرح کا ہوگا؟ کیسے معلوم کیا؟

-15 نیچے دی گئی جدول میں خالی جگہوں کو بھریں:

شمار	△ کا نام	ضلع کی ناپ	زاویہ کی ناپ	باقی زاویوں کی ناپ
-1	$\triangle ABC$	$AB = AC = 4cm., BC = 5cm.$	$\angle B = 50°$	$\angle C = ..., \angle A = ...$
-2	$\triangle PQR$	$PQ = PR = 5cm., QR = 7cm.$	$\angle R = ...$	$\angle P = ..., \angle Q = 45°$
-3	$\triangle DEF$	$DE = DF = 6cm., FE = 8cm.$	$\angle E = ...$	$\angle D = 84°, \angle F = ...$
-4	$\triangle LMN$	$LM = MN = NL = 5cm.$	$\angle L = ...$	$\angle M = ..., \angle N = ...$

-6.5 مثلث کا غیر مساواتی خاصیت

تصویر 6.24 میں ایک مثلث نما کھیت کے باہر کی طرف سے راستہ ہے۔ اس راستے سے متعلق کچھ سوالوں کے جواب جدول(Table) میں دیجئے۔

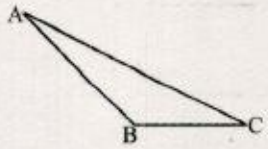
آپ کھڑے ہیں	آپ کو جانا ہے	جانے کے راستے		چھوٹا راستہ
		پہلا راستہ	دوسرا راستہ	
نقطہ A پر	نقطہ B پر	AB	AC+CB	AB
نقطہ B پر	نقطہ C پر			
نقطہ C پر	نقطہ A پر			

یہاں مثلث نما کھیت کے باہر کی طرف کے راستے کے بارے میں آپ نے دیکھا کہ:

$$AC + CB > AB$$

$$BA + AC > BC$$

$$CB + BA > CA$$



یہاں AB، BC اور CA اس مثلث نما کھیت کے ضلع ہیں۔

کچھ کریں:

1cm. سے لے کر 10cm. لمبائی کی بانس کی دس کمچیاں لیجئے۔ اب ان کمچیوں میں کوئی تین کمچیاں ملا کر مثلث بنانے کی کوشش کیجئے اور جدول کو پورا کیجئے۔

کوشش کی گنتی	پہلے کمانچی کی لمبائی	دوسری کمانچی کی لمبائی	پہلی اور دوسری کمانچی کا لمبائی کا جوڑ	تیسرے کمانچی کی لمبائی	کیا مثلث بن رہا ہے؟
(i)					
(ii)					
(iii)					
(iv)					

ان کوششوں میں آپ نے دیکھا کہ آپ انھیں تین کمچیوں سے مثلث بنا پا رہے ہیں۔ جن میں کسی دو کی لمبائی کا جوڑ تیسری کمچی سے زیادہ ہے۔

مثال: تین ضلعوں کی ناپ بالترتیب لگ بھگ 2cm.، 3cm. اور 6cm. ہے۔ کیا ان تین ضلعوں سے مثلث بنانا

ممکن ہے؟

یہاں 2cm.+2cm<6cm.

یعنی دو ضلعوں کا جوڑ تیسری سے کم ہے۔ اس لیے ان تین ضلعوں سے مثلث بنانا ممکن نہیں ہے۔

خود کر کے دیکھئے:

1- بتایئے، نیچے دیئے گئے ضلعوں کی ناپ سے کون کون سے مثلث بنانا ممکن ہے؟

(i) 1cm.,3cm.,6cm (i) 4cm.,8cm.,9cm

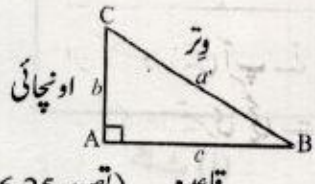
(iii) 3cm.,5cm.,8cm (iv) 3cm.,4cm.,5cm

6.6- پائتھاگورس مسئلہ

پائتھاگورس ایک یونانی فلسفی تھے۔ ان کی پیدائش چھٹی صدی قبل مسیح ہوئی تھی۔ انھوں نے مثلث زاویہ قائمہ کے ضلعوں کی لمبائیوں کے بیچ رشتہ قائم کرنے کے لیے ایک مسئلہ کو ثابت کیا، جسے پائتھاگورس مسئلہ کے نام سے جانا جاتا ہے۔ اس مسئلہ کے برابر ایک دوسرے مسئلہ کے بارے میں ہندوستان کے ماہر ریاضیات بودھاین نے سنہ ۱۰۰۰ قبل مسیح میں معلومات فراہم کی۔ ایسا سمجھا جاتا ہے کہ سنہ ۲۰۰۰ قبل مسیح مصر اور بیبلون کے باشندوں کو مثلث زاویہ قائمہ کے ضلعوں کے درمیان رشتہ کے بارے میں معلومات تھی۔ یوکلیڈ (Euclid) نے ۳۰۰ قبل مسیح اپنی شہرت یافتہ کتاب "The Elements" میں اس مسئلہ کو اُجاگر کیا۔ اگے ہم پائتھاگورس مسئلہ کے بارے میں تفصیل سے جانیں گے۔

زاویہ قائمہ مثلث

زاویہ کی بنیاد پر مثلثوں کی درجہ بندی کرتے وقت ہم نے دیکھا ہے کہ جس مثلث کا ایک زاویہ $90°$ ہو وہ مثلث زاویہ قائمہ کہلاتا ہے۔ مثلث زاویہ قائمہ کے ضلعوں کو خاص نام دیا جاتا ہے۔ زاویہ قائمہ کے سامنے والے ضلع کو وتر (Hypotenuse) کہتے ہیں، جو کہ تین ضلعوں میں سے سب سے بڑا ضلع ہوتا ہے۔ دوسرے دو ضلعوں کو مثلث کے پاؤں (Legs) کی صورت میں جانتے ہیں۔ ان میں سے ایک قاعدہ (Base)، دوسرا ارتفاع یا اونچائی

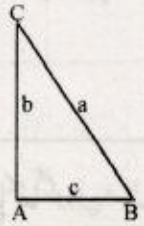


(تصویر 6.25)

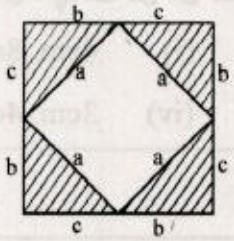
(Perpendicular) کہا جاتا ہے۔

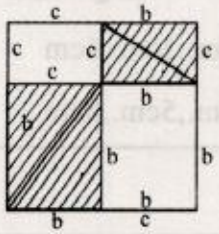
کچھ کریں:

کسی بھی ناپ کا ایک مثلث زاویۂ قائمہ بنائیے۔ ساتھ ہی اس کے اور 7 متبادل لیجئے۔ اس طرح اب آپ کے پاس ایک ہی ناپ کے 8 مثلث ہیں۔ ان سبھی ضلعوں میں وِتر کو a اور دوسرے پاؤں (Legs) کو b اور c مانیں۔



(تصویر 6.27)





(تصویر 6.27)

اب ایک جیسے ناپ کے دو مربع بنائیے، جن کے ضلعوں کی ناپ b+c کے برابر ہو۔ اب 4 مثلث کو پہلے مربع میں اور 4 مثلث کو دوسرے مربع میں تصویر 6.35 کے مطابق قائم کیجئے۔ اب آپ کو معلوم ہے کہ دونوں مربع برابر رقبہ کے ہیں۔ پہلے مربع کا ڈھکا ہوا رقبہ = دوسرے مربع کا ڈھکا ہوا رقبہ۔

$$a^2 = b^2 + c^2$$

اس لیے ہم کہہ سکتے ہیں کہ مثلث زاویۂ قائمہ میں وِتر پر بنا مربع دوسرے دو ضلعوں پر بنے مربعوں کے جوڑ کے برابر ہوتا ہے۔ یہی پائتھاگورس مسئلہ ہے۔

خود کر کے دیکھئے:

مختلف ناپوں کے تین مثلث زاویۂ قائمہ بنائیے اور ان کے ضلعوں کی ناپ ذیل جدول کو پورا کیجئے۔

مثلث (i) | مثلث (ii) | مثلث (iii)

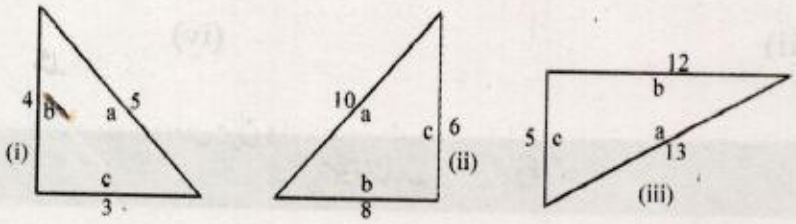
جدول

مثلث کا نام	وتر کی ناپ	پہلا پاؤں ضلع کی ناپ	دوسرے پاؤں ضلع کی ناپ	a^2	b^2	c^2	b^2+c^2	کیا $a^2=b^2+c^2$
-1								
-2								
-3								

یہاں جدول میں ہم نے دیکھا کہ مثلث زاویۂ قائمہ میں $a^2=b^2+c^2$

یعنی زاویۂ مثلث میں وتر کا مربع دوسرے دوضلعوں کے مربعوں کے جوڑ کے برابر ہوتے ہیں۔

-2 آیئے اب ذیل کے مثلثوں پر غور کریں:



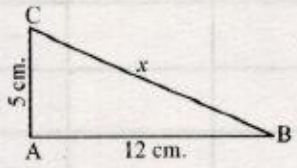
(تصویر 6.28)

تصویر 6.28 میں بنے تین مثلثوں کے ضلعوں کی ناپ کے مطابق ذیل کے جدول کو پورا کیجئے۔

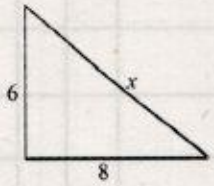
مثلث کا نام	a^2	b^2	c^2	b^2+c^2	کیا $a^2=b^2+c^2$	ضلع a کے سامنے کے زاویہ کی ناپ	مثلث کی قسمیں
(i)							
(ii)							
(iii)							

-3 ایک مثلث کے ضلعوں .6cm، .8cm اور .10cm لمبی ہے۔ ثابت کیجئے کہ کیا وہ زاویہ قائمہ مثلث ہے۔

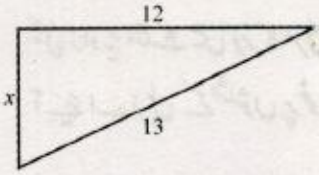
-4 ذیل کے مثلثوں میں نامعلوم ضلعوں کی ناپ معلوم کیجئے:



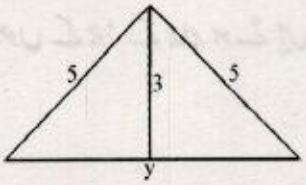
(i)



(i)



(iii)



(iv)

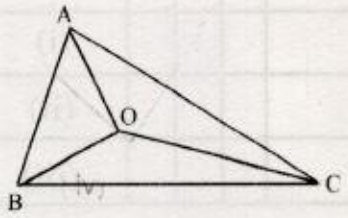
سوالنامہ : 6.2

-1 نیچے تین اعداد کا مجموعہ دیا گیا ہے۔ بتایئے کہ کون سا مجموعہ مثلث کے ضلعوں کو ظاہر کرتی ہیں۔

(i) (3, 4, 5) (ii) (2, 3, 4)

(iii) (1, 2, 3) (iv) (1,3, 5)

-2 تصویر 6.29 میں O نقطہ مثلث ABC کے اندر واقع ہے۔ بتایئے کہ نیچے دئے گئے اقوال میں کون صحیح ہے اور کون غلط؟



(تصویر 6.29)

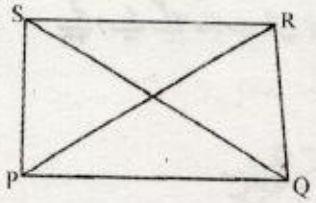
(i) $AO+OB<AB$

(ii) $AO+OC>AC$

(iii) $BO+OC=BC$

-3 تصویر 6.30 میں PQRS ایک ذوا ربعۃ الاضلاع ہے۔
تب دکھایئے کہ

$$PQ+QR+RS+SP>PR+SQ$$

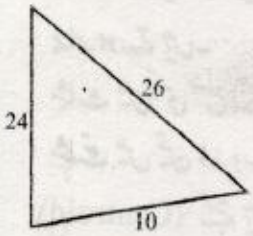


(تصویر 6.30)

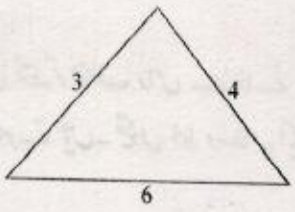
-4 ایک مثلث کے دو ضلعوں کی ناپ 10 سینی میٹر اور 14 سینٹی میٹر ہے۔ اس مثلث کے تیسرے ضلع کی سب سے کم اور سب سے زیادہ ناپ کی حد فاصل کیا ہوگی؟

-5 ABC ایک مثلث ہے جس کا $\angle A$ زاویۂ قائمہ ہے۔ اگر $AB=10$ سینٹی میٹر $AC=24$ سینٹی میٹر، تب وتر BC کی قیمت کیا ہوگی؟

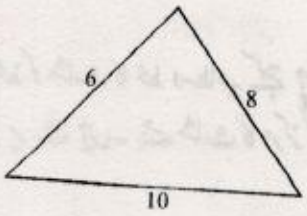
-6 نیچے دیئے گئے مثلثوں میں سے کون کون سے مثلث ،مثلث قائم الزاویہ ہیں؟ ان کے نیچے صحیح کا نشان (✓) لگایئے۔ ساتھ ہی مثلث کا جو زاویۂ قائمہ ہے اسے $90°$ لکھ کر نشاندہی کیجئے۔



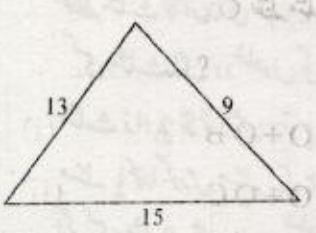
(i)



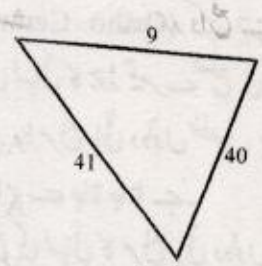
(ii)



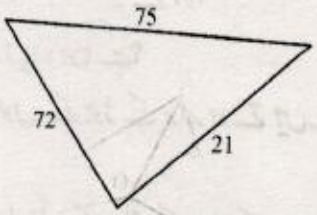
(iii)



(iv)



(v)

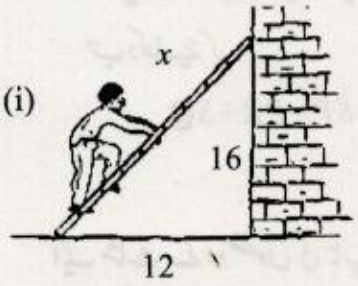


(vi)

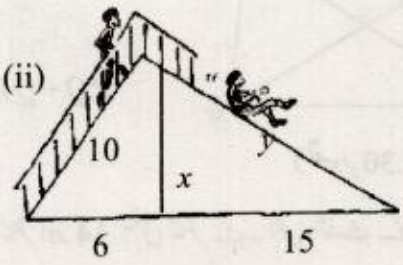
☆ تصویر (i)، (iii)، (iv) اور (vi) کو ضلع کے ناپ کے مطابق مثلث قائم الزاویہ ہیں۔

7- نیچے دیئے گئے حالات میں 'x' اور 'y' کا قیمت نکالئے۔

(i)



(ii)



$x =$ _____ $x =$ _____, $y =$ _____

ہم نے سیکھا

1- مثلث میں تین ضلع، تین زاویہ اور تین راس ہوتے ہیں۔

2- مثلث کے تینوں زاویوں کا جوڑ دو زاویۂ قائمہ یعنی $180°$ ہوتا ہے۔

3- مثلث متساوی الاضلاع کے تینوں ضلعے آپس میں برابر ہوتے ہیں۔

4- مثلث متساوی الساقین کے دو ضلعے برابر ہوتے ہیں۔ اور برابر ضلعوں کے سامنے کے زاویے بھی آپس میں برابر ہوتے ہیں۔

5- مثلث میں کسی ضلع کے وسطی نقطہ کو مخالف راس سے ملانے والے خط کو مثلث کا خط وسطانیہ کہتے ہیں؟ مثلث میں تین خط وسطانیہ ہوتے ہیں۔ تینوں خط وسطانیہ ایک نقطہ پر ملتے ہیں۔ جسے مثلث کا مرکز ثقل (Centroid) کہتے ہیں۔

6- کسی مثلث کے ایک راس سے اس کے مقابل ضلع پر کھینچے گئے عمودی خط کو مثلث کا خط ارتفاع کہتے ہیں۔ مثلث کے تین خط ارتفاع ہوتے ہیں۔ تینوں خط ارتفاع (Altitude) ایک نقطہ پر ملتے ہیں۔ وہ نقطہ مثلث کا ارتفاعی مرکز (Ortho Centre) کہتے ہیں۔

7- کسی مثلث میں دو ضلعوں کی لمبائی کا جوڑ تیسرے ضلع کی لمبائی سے زیادہ ہوتا ہے؟

8- مثلث زاویۂ قائمہ میں وتر پر بنا مربع باقی دونوں ضلعوں پر بنے مربعوں کے جوڑ کے برابر ہوتے ہیں۔ یہ مسئلہ پائتھاگورس مسئلہ کے نام سے جانا جاتا ہے۔

9- اگر کسی مثلث میں بڑے ضلع کی لمبائی کا مربع باقی دونوں ضلعوں کی لمبائی کے مربع کے جوڑ کے برابر ہو، تب وہ مثلث مثلث زاویۂ قائمہ ہوگا۔

☆ کسی بھی مثلث میں ایک سے زیادہ زاویہ قائمہ یا زاویہ منفرجہ نہیں ہوسکتا۔

S.S.A. 2014-15 (FREE)

باب: 7

مماثلت (Congruency)

تمہید:

(تصویر 7.1)

پایل اپنی تجوری میں رکھے سکّوں کی گنتی کر رہی تھی۔ تبھی اس کا چھوٹا بھائی پلّو وہاں پہنچا اور اس کو گننے میں مدد کرنے لگا۔ پایل نے اسے سکّوں کو چھانٹنے کو کہا۔ اسی درمیان پایل کو اس کی ماں نے کسی کام سے اپنے پاس بلا لیا۔ کام ختم کر جب پایل واپس اپنے بھائی کے پاس لوٹی تو وہ یہ دیکھ کر حیرت زدہ ہوگئی کہ پلّو نے سکّوں کو صحیح ڈھنگ سے چھانٹ کر رکھا تھا۔ اس نے پلّو سے چھانٹنے کا طریقہ پوچھا۔ پلّو نے بتایا کہ میں نے سکّوں کو ایک کے اوپر ایک رکھ کر دیکھا جو سکّے آپس میں ایک دوسرے کو پوری طرح ڈھک رہے تھے، انھیں ایک ساتھ رکھا۔

آپ بھی اپنے آس پاس میں اسی طرح پورے طور سے ایک دوسرے کو ڈھکنے والی چیزوں کو تلاش کیجئے۔

7.1- متماثل شکل اور مماثلت (Congruent Figure and Congruency)

ایک طرح کے دو بلیڈ لیجئے۔ دونوں کو ایک دوسرے پر رکھ کر دیکھئے۔ کیا وہ دونوں ایک دوسرے کو ڈھک لیتے ہیں۔ ایک ہی ساخت کی تاش کے دو پتے لیجئے۔ ایک پتے کو دوسرے کے اوپر رکھئے۔ آپ پائیں گے کہ دونوں بلیڈ اور تاش کے پتے ایک دوسرے کو پوری طرح سے ڈھک لیتے ہیں۔ اس کا مطلب ہے کہ دونوں پتے یا بلیڈ ایک ہی ساخت اور پیمائش کے ہیں۔ ایسی چیزیں متماثل (Congruent) کہلاتی ہیں۔ اور دو چیزوں کی متماثل ہونے کا تعلق مماثلت (Congruency) کہلاتا ہے۔

(تصویر 7.2)

دو شکلوں کی مماثلت کو ہم نشان $\cong$ سے دکھاتے ہیں۔ اگر A اور B دو شکلیں متماثل ہیں۔ تب ہم $A \cong B$ لکھتے ہیں۔

کچھ کریں:

کسی دو چیزوں کے نام لکھئے، جو

(الف) ایک دوسرے کو پورا پورا ڈھکتی ہوں .....

.....

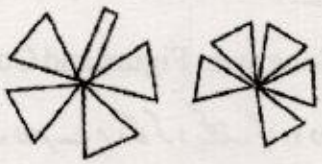
(ب) ایک دوسرے کو پورا پورا نہیں ڈھکتی ہوں .....

.....

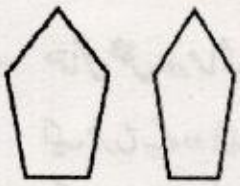
2- اپنی کاپی کے صفحہ کے نیچے کاربن لگائیے اور جس صفحہ کے نیچے آپ نے کاربن لگایا ہے اس صفحہ پر کوئی شکل بنائیے۔ اب بتائیے کاربن کے نیچے والے صفحہ پر بنی ساخت اوپر صفحہ پر بنی ساخت یا شکل کی متماثل ہیں یا نہیں؟

3- نیچے کچھ شکلوں کے جوڑے دیئے گئے ہیں۔ بتائیے کہ یہ متماثل(Congruent) ہیں یا نہیں؟

(i)

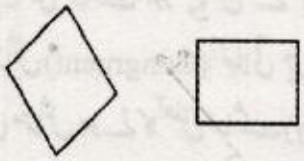


(ii)



(iii)

(iv)



.....

7.2 - اقلیدسی شکلوں کی مماثلت

جس طرح ایک تصویر کو اس کی ساخت اور پیمائش میں تبدیل کئے بغیر ایک جگہ سے اٹھا کر دوسری جگہ رکھ کر ہم نے مماثلت کی جانچ کی، اُسی طرح اقلیدسی شکلوں کو بھی ایک کے اوپر دوسری رکھ کر جانچ کر سکتے ہیں۔ لیکن دھیان رہے کہ ان کی ساخت (پیمائش) اور بناوٹوں میں تبدیلی نہیں کر سکتے ہیں۔ آیئے اب کچھ اقلیدسی شکلوں کی مماثلت کے بارے میں غور کریں۔

7.2.1 - قطعہ خطوط کی مماثلت

نیچے دیئے گئے قطعہ خطوط کے دو جوڑے کو دیکھئے:

(تصویر 7.3)

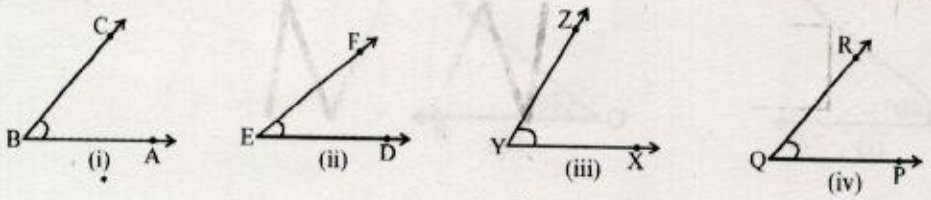
دونوں جوڑوں میں ایک قطعہ خطوط کو ٹریسنگ پیپر پر ٹریس کر لیجئے اور دوسرے پر رکھ کر دیکھئے کہ کون سے جوڑے متماثل ہیں؟

آپ دیکھیں گے کہ پہلا جوڑا متماثل ہے، جب کہ دوسرا نہیں۔ ان کی لمبائی کی پیمائش کیجئے کہ کس جوڑے کی لمبائی یکساں ہے؟ یہی عمل کچھ اور قطعہ خطوط کے جوڑے کے ساتھ کر کے دیکھئے۔

> اگر دو قطعہ خطوط کی لمبائی برابر ہے تو وہ متماثل ہوں گے۔ اسی طرح اگر دو قطعہ خطوط متماثل ہیں تو ان کی لمبائیاں بھی برابر ہوں گی۔

اوپر تصویر 7.3 میں $\overline{AB} = \overline{CD}$ اور $\overline{AB} \cong \overline{CD}$

7.2.2- زاویوں کی مماثلت



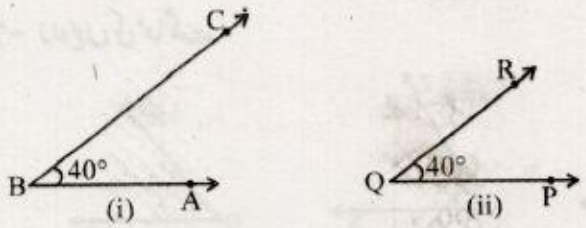
(تصویر 7.4)

اوپر تصویر 7.4 میں چاروں زاویوں کو دیکھئے۔ یہ مختلف پیمائشوں کے ہیں۔ (i) میں بنے زاویے کو ٹریسنگ پیپر (Tracing Paper) پر ٹریس کیجئے اور پھر انطباق کے قاعدہ سے اس ٹریس کئے گئے زاویوں سے باری باری (i)، (iii) اور (iv) میں بنے زاویوں کو ڈھکنے کی کوشش کیجئے۔ مثال کے طور پر دوسرے نمبر کے زاویہ کو ڈھکنے کے لیے سب سے پہلے نقطہ A کو D پر اور $\overline{BA}$ کو $\overline{ED}$ پر رکھئے اور بتایئے، کیا $\overline{BC}$ ، $\overline{EF}$ پر آیا؟ اسی طرح دوسرے دو زاویوں (iii) اور (iv) پر بھی ڈھکنے کی کوشش کیجئے۔ $\angle ABC$ نے $\angle PQR$ کو پوری طرح سے ڈھک لیا۔ یعنی $\angle ABC$ اور $\angle PQR$ متماثل ہیں۔ یہاں ہم نے دیکھا کہ $\angle ABC$ ، $\angle DEF$ اور $\angle XYZ$ کو نہیں ڈھک پایا۔ یعنی $\angle ABC$ ، $\angle DEF$ اور $\angle XYZ$ کے متماثل نہیں ہیں۔ اسے ہم اس طرح بھی لکھ سکتے ہیں۔ $\angle ABC \cong \angle PQR$ اور $m\angle ABC = m\angle PQR$

ہم کہہ سکتے ہیں کہ دو زاویوں کی پیمائش اگر برابر ہوں تو وہ آپس میں متماثل ہوتے ہیں اگر دو زاویے متماثل ہوں تو ان کی پیمائش برابر ہوتی ہیں۔

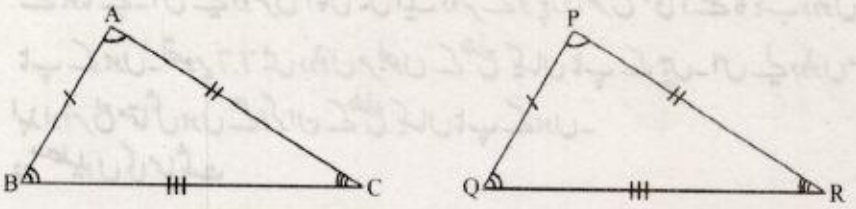
کیا آپ ایسے زاویوں کا جوڑا بنا سکتے ہیں، جن کے ضلع کی پیمائش برابر نہیں ہو پھر بھی وہ متماثل ہوں۔ آیئے اب تصویر 7.5 میں بنے زاویوں پر غور کریں۔

$\angle PQR$ کو جب $\angle ABC$ پر منطبق کرتے ہیں تب شعاع $\overrightarrow{QP}$ شعاع $\overrightarrow{BA}$ پر اور شعاع $\overrightarrow{QR}$ شعاع $\overrightarrow{BC}$ پر پڑتی ہے لیکن شعاع $\overrightarrow{QR}$ شعاع $\overrightarrow{BC}$ کو پوری طرح نہیں ڈھک پاتی ہے اور شعاع $\overrightarrow{BC}$ زیادہ لمبی معلوم ہوتی ہے۔ اس طرح ہم کہہ سکتے ہیں کہ $\angle ABC$ ، $\angle PQR$ سے بڑا ہے۔ لیکن $\overrightarrow{BC}$ صرف زاویہ کی سمت کو بتلاتا ہے، لمبائی کو نہیں۔ یہاں زاویوں کی پیمائش یکساں ہے۔ اس لیے $\angle PQR$ ، $\angle ABC$ کے متماثل ہیں یعنی $\angle ABC \cong \angle PQR$ ۔ اس لیے زاویوں کی مماثلت صرف ان کی پیمائشوں کی برابر پر منحصر ہے۔



(تصویر 7.5)

7.2.3- مثلثوں کی مماثلت



(تصویر 7.6)

تصویر 7.6 میں بنے دونوں مثلث کو غور سے دیکھئے۔ یہ دونوں مثلث برابر ساخت اور یکساں شکل کے ہیں۔ $\angle ABC$ کو ٹریسنگ پیپر پر ٹریس کر $\angle PQR$ پر منطبق کیجئے۔ کیا $\angle ABC$ اور $\angle PQR$ ایک دوسرے کو آپس میں پوری طرح ڈھک لیتے ہیں۔ اگر ہاں تو دونوں مثلث متماثل ہیں۔ اسے اس طرح لکھیں گے:

$$\angle ABC \cong \angle PQR$$

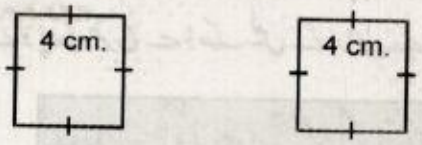
یہاں $\angle ABC$ کو $\angle PQR$ پر بالمقام کرتے وقت آپ نے راس P کے اوپر راس A، راس Q کے اوپر راس B اور راس R کے اوپر راس C کو رکھا تھا، جس سے $\angle P$ پر $\angle A$، $\angle Q$ پر $\angle B$، $\angle R$ پر $\angle C$ بالمقام ہوئے اور ضلع $\overline{PQ}$ پر ضلع $\overline{AB}$، ضلع $\overline{QR}$ پر ضلع $\overline{BC}$ اور ضلع $\overline{RP}$ پر ضلع $\overline{CA}$ بالمقام ہوگی۔ یہ سبھی راس، زاویہ اور اضلاع دونوں مثلثوں کے نظیری حصے ہیں۔ اسے ہم اس طرح ظاہر کرتے ہیں:

نظیری راس A اور P، B اور Q، C اور R

نظیری مثلث $\angle A$ اور $\angle P$، $\angle B$ اور $\angle Q$، $\angle C$ اور $\angle R$

نظیری اضلاع $\overline{AB}$ اور $\overline{PQ}$، $\overline{BC}$ اور $\overline{QR}$، $\overline{CA}$ اور $\overline{RP}$

7.2.4- دو مربعوں کی مماثلت



(تصویر 7.7)

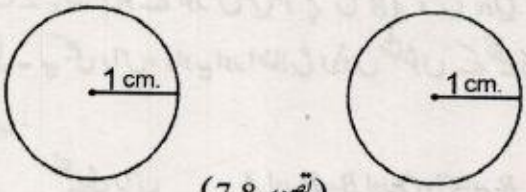
سبھی مربع کی ساخت ایک ہی طرح کے ہوتے ہیں۔ مربعوں کی ناپ کا تعین ان کی ضلع کی لمبائی سے ہوتا ہے۔ اس لیے دو مربع آپس میں ایک دوسرے کو پوری طرح تبھی ڈھکے گا جب دونوں کے ضلع برابر ناپ کے ہوں۔ تصویر 7.7 میں دونوں مربعوں کے ضلع یکساں ناپ کے ہیں۔ اس لیے دونوں متماثل ہیں۔ لہذا دو مربع متماثل ہوں گے اگر ان کے ضلع یکساں ناپ کے ہوں۔

7.2.5- دو مستطیلوں کی مماثلت

(تصویر 7.8)

مستطیل کی ساخت اور ناپ کا تعین اس کی لمبائی اور چوڑائی سے ہوتا ہے۔ اگر دو مستطیلوں کی لمبائی اور چوڑائی برابر ہوں تو وہ ایک دوسرے کو پوری طرح سے ڈھک لیں گے۔ یعنی وہ ساخت اور ناپ میں بھی برابر ہوں گے۔ تصویر 7.8 میں دونوں مستطیل کی لمبائی اور چوڑائی برابر ہیں۔ وہ ساخت اور ناپ میں بھی برابر ہیں۔ اس لیے یہ ایک دوسرے کو پوری طرح سے ڈھک لیتے ہیں۔ اس لیے دونوں مستطیل متماثل ہیں۔ اس طرح ہم کہہ سکت ہیں کہ دو مستطیل تبھی متماثل ہوں گے، جب ان کی لمبائی اور چوڑائی برابر ناپ کے ہوں۔ لہذا دو مستطیل متماثل ہوں گے اگر ان کی لمبائی اور چوڑائی یکساں ناپ کے ہوں۔

7.2.6 - دائروں کی مماثلت



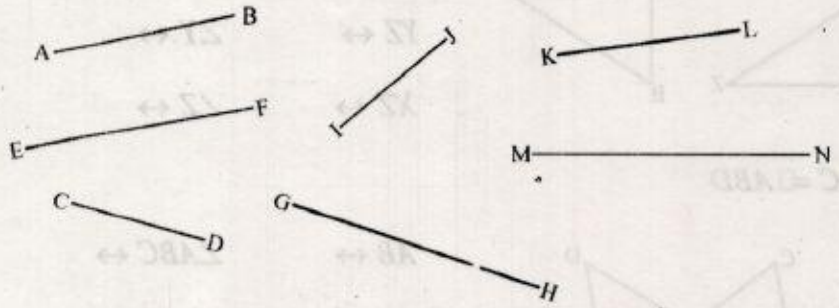
(تصویر 7.8)

سبھی دائرے ساخت میں یکساں ہوتے ہیں۔ ان کی پیمائش کا تعین نصف قطر (Radius) سے ہوتا ہے۔ جس دائرہ کا نصف قطر جتنا زیادہ ہوگا اس کی پیمائش بھی اتنی ہی زیادہ ہوگی۔ یہاں تصویر 7.9 میں دو یکساں نصف قطر والے دائرے ہیں۔ اگر پہلے دائرہ کو ٹریس کر دوسرے پر منطبق کیا جائے تو دونوں ایک دوسرے کو پوری طرح سے ڈھک لیں گے۔ اس لیے دونوں دائرے متماثل ہیں۔

دو دائرہ متماثل ہوں گے، اگر ان کا نصف قطر برابر ہو۔

سوالنامہ : 7.1

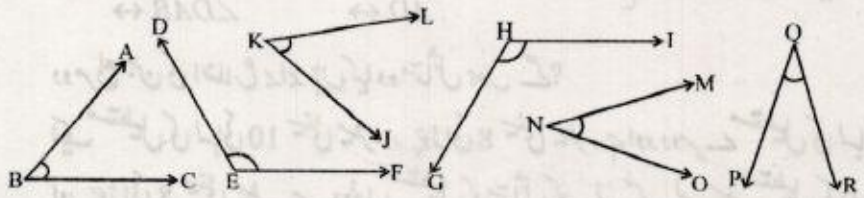
-1 (i) تصویر 7.10 میں متماثل قطعہ خط کو الگ کیجئے۔ (آپ ٹریس کر کے دیکھئے)



(تصویر 7.10)

(ii) متماثل قطعہ خطوط کو ناپئے۔ ان کی ناپ کے بارے میں آپ کیا کہہ سکتے ہیں؟

-2 (i) نیچے دی گئی تصویر میں متماثل زاویوں کو الگ کیجئے۔ (زاویوں کو ٹریس کر کے معلوم کیجئے)



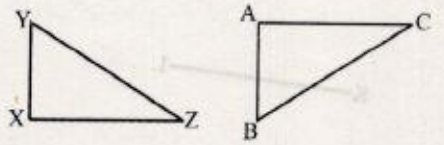
(تصویر 7.11)

(ii) ان میں سے متماثل زاویوں کو ناپئے۔ آپ ان کی ناپ کے بارے میں کیا کہہ سکتے ہیں؟

-3 $\angle ABC$ اور $\angle DEF$ متماثل ہیں۔ اگر $\angle ABC$ کی ناپ $70°$ ہو تو $\angle DEF$ کی ناپ کیا ہوگی؟

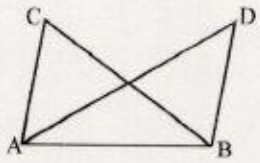
4- نیچے دیئے گئے متماثل مثلثوں کے ہر ایک جوڑے میں نظیری اضلاع اور نظیری زاویے بتایئے:

(i) $\triangle XYZ = \triangle ABC$



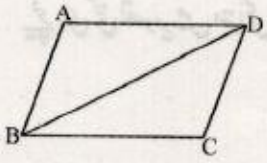
ضلع	زاویہ
$XY \leftrightarrow$	$\angle X \leftrightarrow$
$YZ \leftrightarrow$	$\angle Y \leftrightarrow$
$XZ \leftrightarrow$	$\angle Z \leftrightarrow$

(ii) $\triangle ABC = \triangle ABD$



$AB \leftrightarrow$	$\angle ABC \leftrightarrow$
$BC \leftrightarrow$	$\angle BCA \leftrightarrow$
$AC \leftrightarrow$	$\angle BAC \leftrightarrow$

(iii) $\triangle ABD = \triangle CBD$



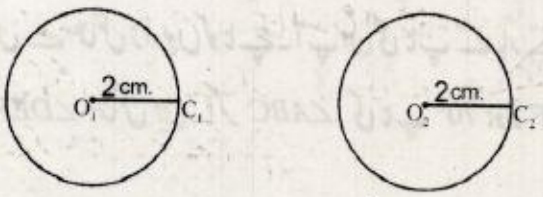
$AB \leftrightarrow$	$\angle ABD \leftrightarrow$
$BD \leftrightarrow$	$\angle BDA \leftrightarrow$
$AD \leftrightarrow$	$\angle DAB \leftrightarrow$

5- دو مربع جن کی اضلاع برابر ہیں کیا وہ متماثل ہوں گے؟

6- ایک مستطیل کی لمبائی 10 سینٹی میٹر اور چوڑائی 8 سینٹی میٹر ہے اور دوسرے مستطیل کی لمبائی 12 سینٹی میٹر اور چوڑائی 8 سینٹی میٹر ہے۔ دونوں مستطیل کو متماثل کرنے کے لیے پہلے مستطیل کی لمبائی کو کتنا بڑھانا پڑے گا؟

7- تصویر 7.12 میں بنے دو دائرے کیا متماثل ہوں گے۔ اگر ہاں تو کیوں؟

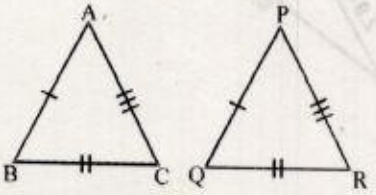
(تصویر 7.12)



7.3- دو مثلثوں کے متماثل ہونے کی شرط

جب دو مثلث متماثل ہوتے ہیں تو ان کے نظیری اضلاع اور نظیری زاویے آپس میں برابر ہوتے ہیں۔ اُسی طرح دو مثلثوں کے نظیری اضلاع اور نظیری زاویے آپس میں برابر ہوں تو دونوں مثلثوں متماثل ہوتے ہیں۔

تصویر 7.13 میں دو مثلث ABC اور PQR دیئے گئے ہیں جو متماثل ہیں۔



تب $\overline{AB} = \overline{PQ}, \overline{BC} = \overline{QR}, \overline{AC} = \overline{PR}$

اور $\angle ABC = \angle PQR, \angle BCA = \angle QRP$

اور $\angle CAB = \angle RPQ$ ہوگا۔

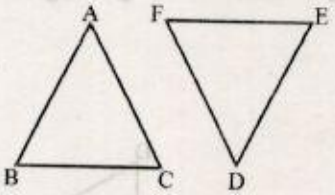
اسی طرح تصویر 7.14 میں

$\overline{AB} = \overline{DE}, \overline{BC} = \overline{EF}, \overline{CA} = \overline{FD}$

$\angle ABC = \angle DEF, \angle BCA = \angle EFD$

اور $\angle EAB = \angle FDE$ ہے

تب $\triangle ABC = \triangle DEF$



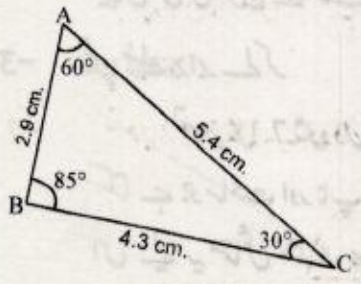
(تصویر 7.14)

اسی طرح دو مثلثوں میں مماثلت کے لیے ضروری حصوں میں دونوں مثلثوں کے تینوں زاویے اور تینوں اضلاع شامل ہوتے ہیں۔

غور کیجئے قطعہ خط، زاویے، مربع، مستطیل اور دائرہ کی طرح دو مثلث کی مماثلت ظاہر کرنے کے لیے یا دکھانے کے لیے مثلث کے سبھی 6 حصوں میں برابری دکھانی ہوگی یا کچھ حصہ سے کام چل جائے گا۔ آیئے اسے کر کے دیکھیں۔

کچھ کریں:

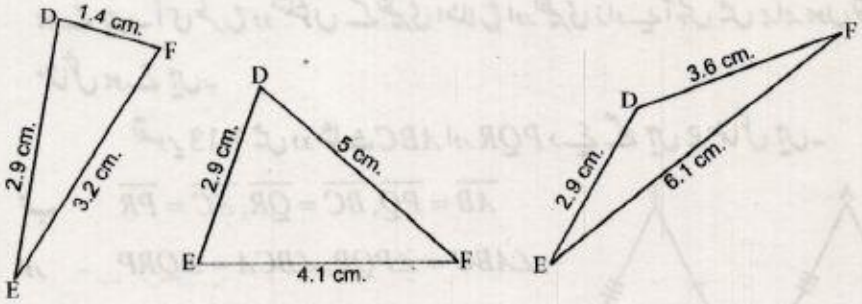
یہاں تصویر 7.15 میں ایک مثلث (Triangle) بنایا گیا ہے اور اس کے سبھی 6 حصوں (تین اضلاع اور تین زاویے) کی ناپ کو بھی دکھایا گیا ہے۔ آپ باری باری سے ان کی ناپ کو لے کر دیکھیں کہ کم سے کم کتنے حصوں کی برابری



(تصویر 7.15)

کے بعد اس کے متماثل ایک مثلث بنایا جا سکتا ہے؟

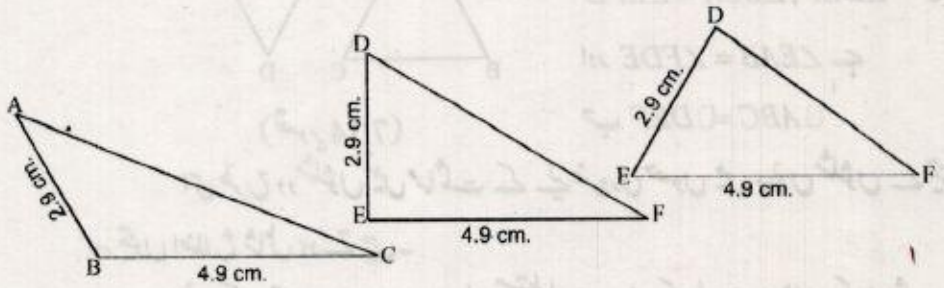
1- ایک ضلع کی ناپ برابر لے کر



(تصویر 7.16)

تصویر 7.16 کی طرح کئی قسم کے مثلث بنائے جا سکتے ہیں۔ لیکن وہ ABC □ کے متماثل ہوں ضروری نہیں۔

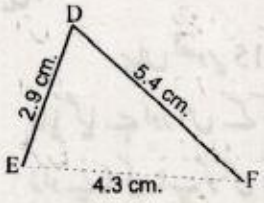
2- دو ضلعوں کی برابر ناپ لے کر



(تصویر 7.17)

یہاں بھی کئی طرح کے مثلث بنائے جا سکتے ہیں۔ لیکن وہ ABC □ کے متماثل ہوں، ضروری نہیں ہے۔

3- تین ضلعے برابر لے کر



(تصویر 7.18)

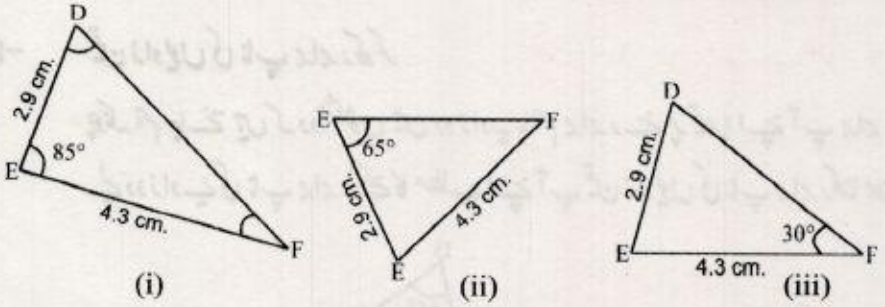
تصویر 7.18 میں اس طرح کا ایک ہی مثلث بنایا جا سکتا ہے جو ساخت اور ناپ میں ABC □ کے برابر ہوگا۔ اس لیے یہ متماثل مثلث ہوگا۔ یہ ضلع ضلع ضلع (SSS) مماثلت کی شرط کہلاتا ہے۔

4- ایک ضلع اور ایک زاویہ کی ناپ برابر لے کر

(تصویر 7.19)

اس حالت میں بھی کئی مثلث بنائے جا سکتے ہیں، جو ABC کے متماثل ہوں۔ یہ ضروری نہیں۔

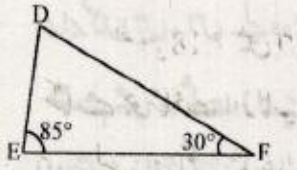
5- دو ضلع اور ایک زاویہ برابر لے کر



(تصویر 7.20)

اگر دو ضلع اور کوئی ایک زاویہ برابر لیتے ہیں، تب ضروری نہیں ہیں کہ بننے والے مثلث متماثل ہی ہو۔ لیکن جب دو ضلع اور ان کے بیچ بننے والا زاویہ برابر لیتے ہیں، تب بننے والا مثلث متماثل ہوتا ہے۔ جیسا تصویر 7.20 کے (i) میں بنایا گیا ہے۔ یہ ضلع - زاویہ - ضلع (SAS) مماثلت شرط کہلاتا ہے۔

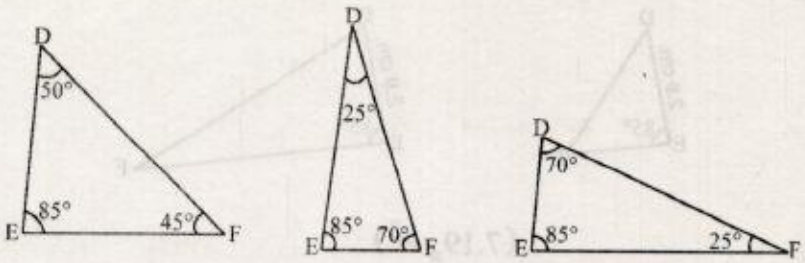
6- ایک ضلع اور دو زاویے برابر ہوں



(تصویر 7.21)

اس کے مطابق جتنے بھی مثلث بنیں گے ان سب کی ساخت اور ناپ تصویر 7.21 میں بنے مثلث کی طرح ہی ہوگا اور اس طرح بنا مثلث ABC کا متماثل ہوگا۔ یہ زاویہ - ضلع - زاویہ (ASA) مماثلت شرط کہلاتا ہے۔

7- ایک زاویہ کی ناپ برابر رکھ کر

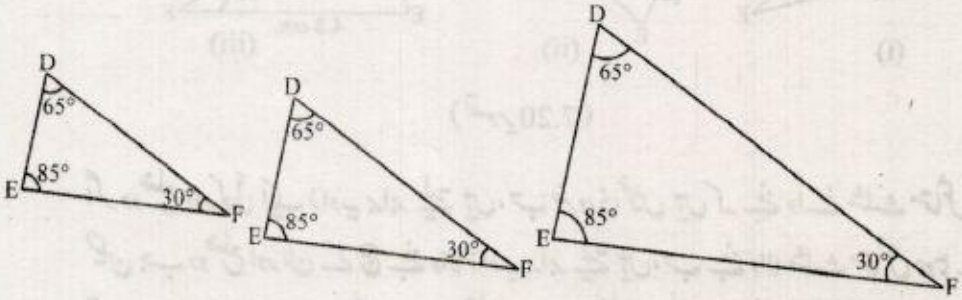


(تصویر 7.22)

یہاں بھی کئی طرح کے مثلث بنائے جا سکتے ہیں۔ جو ABC کے متماثل نہیں ہیں۔

8- تین زاویوں کی ناپ برابر رکھ کر

چونکہ ہم جانتے ہیں کہ دو مثلثوں میں دو زاویہ باہم برابر رہنے پر تیسرا اپنے آپ برابر ہو جاتا ہے۔ اس لیے دو زاویے کی ناپ برابر رکھنے کا مطلب اپنے آپ تین زاویوں کی ناپ برابر رکھنا ہوتا ہے۔



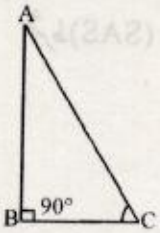
(تصویر 7.23)

یہاں بھی کئی طرح کے زاویے بنائے جا سکتے ہیں، جو شکل میں تو ABC کے برابر ہیں لیکن ساخت میں برابر نہیں ہیں۔ اس لیے وہ متماثل نہیں ہیں۔

9- مثلث میں مماثلت زاویۂ قائمہ

دو مثلث زاویۂ قائمہ کی حالت میں مماثلت کو مناسب طور پر خاص دھیان دینا ہوتا ہے۔ ایسے مثلثوں میں زاویۂ قائمہ پہلے سے ہی برابر ہوتے ہیں۔ اس لیے مماثلت کی شرط آسان ہو جاتی ہے۔

کیا آپ ایک $\triangle ABC$ بنا سکتے ہیں، جس میں $\angle B = 90°$ ہو (تصویر 7.24) میں دکھایا گیا ہے۔ اگر



(تصویر 7.24)

(i) صرف ضلع BC معلوم ہو۔

(ii) صرف $\angle C$ معلوم ہو۔

(iii) صرف $\angle A$ اور $\angle C$ معلوم ہو۔

(iv) ضلع AB اور BC معلوم ہو۔

(v) وتر AC اور AB یا BC میں سے ایک ضلع معلوم ہو۔

ان کے خاکے بنانے کی کوشش کیجئے۔ آپ دیکھیں گے کہ (iv) اور (v) مثلث بنانے میں آپ کی مدد کرتے ہیں۔ لیکن حالت (iv) عام طور سے SAS مماثلت شرط ہی ہے۔ حالت (v) میں کچھ نئی صورت حال ہے۔ یہ درج ذیل مماثلت شرط کی جانب پیش قدمی کرتا ہے۔

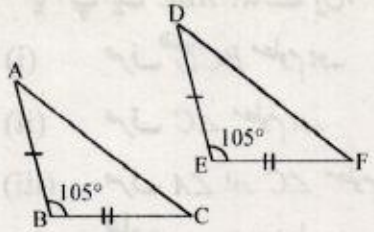
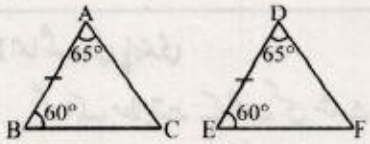
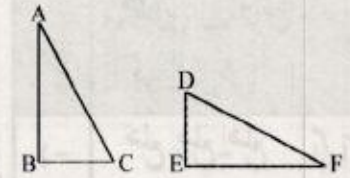
RHS مماثلت کی پابندی

اگر ایک مطابقت کے تحت کسی مثلث زاویۂ قائمہ کا وتر اور ایک ضلع سلسلہ وار کسی دوسرے مثلث زاویۂ قائمہ کے وتر اور ایک ضلع کے برابر ہو، تو وہ مثلث متماثل ہوتے ہیں۔

ہم اسے RHS مماثلت کیوں کہتے ہیں؟ اس کے بارے میں غور وفکر کیجئے۔

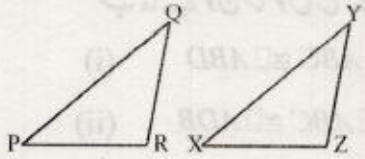
اوپر کی نوعملیات کے تحت ہم دو مثلثوں کے متماثل ہونے کی شرطوں کو ہم درج ذیل طریقوں سے جدول میں رکھ سکتے ہیں۔

نمبر شمار	دو مثلثوں کے متماثل ہونے کی شرط	شرط کی وضاحت	شرط کی مثال
-1	ضلع-ضلع-ضلع شرط (SSS)	اگر ایک مثلث کی تینوں اضلاع دوسرے مثلث کی تینوں اضلاع کی ناپ کے برابر ہو، تب دونوں مثلث متماثل ہوں گے	$\overline{AB} = \overline{DE}, \overline{BC} = \overline{EF}, \overline{AC} = \overline{DF}$ تب $\triangle ABC \cong \triangle DEF$

-2	ضلع-زاویہ-ضلع شرط (SAS)	اگر ایک مثلث کے دو ضلعے اور ان سے بنے زاویے، دوسرے مثلث کی دو ضلعے اور ان سے بنے زاویے کے برابر ہوں تو دونوں مثلث متماثل ہوں گے۔	 $\overline{AB} = \overline{DE}, \overline{BC} = \overline{EF}$ $\angle B = \angle E$ تب $\triangle ABC \cong \triangle DEF$
-3	زاویہ-ضلع-زاویہ شرط (ASA)	اگر ایک مثلث کے دو زاویے اور اِن کے مشترک دوسرے مثلث کے دو زاویے اور اِن کے مشترک کے برابر ہوں تو دونوں مثلث متماثل ہوں گے۔	 $\angle A = \angle D, \angle B = \angle E, \overline{AB} = \overline{DE}$ تب $\triangle ABC \triangle DEF$
-4	زاویۂ قائمہ-دو ہندسہ-ضلع شرط (RHS)	دو زاویۂ قائمہ مثلثوں میں سے ایک مثلث کا دو وِتر اور ایک ضلع، دوسرے مثلث کے وِتر اور کوئی ایک دوسرے ضلع کے برابر ہو تو دونوں مثلث متماثل ہوں گے۔	 $\angle B = \angle E = 90°$ $\overline{AC} = \overline{DF}, \overline{BC} = \overline{EF}$ $\triangle ABC \cong \triangle DEF$

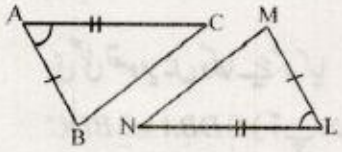
سوالنامہ : 7.2

-1 ذیل میں آپ کون سی مماثلت کی شرائط کا استعمال کریں گے؟



(i) دیا ہے: $PQ = XY, QR = YZ, PR = XZ$

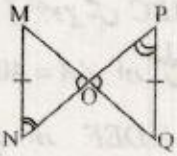
اس لیے $\triangle ABC \cong \triangle DEF$



(ii) دیا ہے: $AB = LM, AC = NL$

$\angle BAC = \angle MLN$

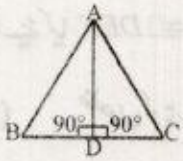
اس لیے $\triangle ABC \cong \triangle LMN$



(iii) دیا ہے: $MN = PQ$

$\angle MON = \angle POQ$

اس لیے $\angle ONM = \angle OPQ$



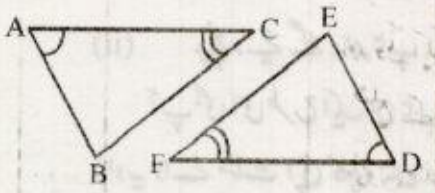
(iv) دیا ہے: $\angle ADB = \angle ADC = 90°$

$AD = AD$

$AB = AC$

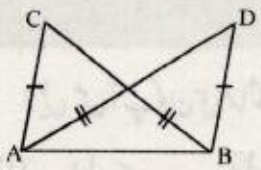
اس لیے $\triangle ABD \cong \triangle ACD$

-2 تصویر میں بنے دو مثلث $\triangle ABC$ اور $\triangle DEF$ آپس میں مماثلت دکھاتے ہیں؟ تو درج ذیل مرحلوں کے لیے خالی جگہوں میں وجہ لکھئے:



	ترتیب	وجوہات
(i)	$AC = FD$	
(ii)	$\angle BAC = \angle FDE$	
(iii)	$\angle ACB = \angle EFD$	

-3 دی گئی تصویر میں ایک قاعدہ AB پر بنے دو مثلث ABC اور ADB میں ضلع $AC=BD$، $BC=AD$

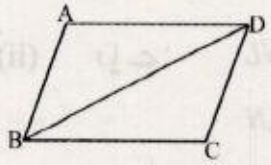


تب بتایئے کون سا قول صحیح ہے؟

(i) $\triangle ABC \cong \triangle ABD$

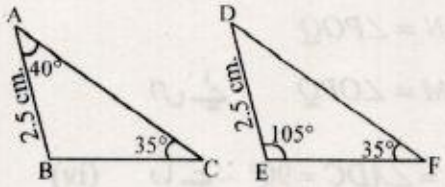
(ii) $\triangle ABC \cong \triangle ADB$

(iii) $\triangle ABC \cong \triangle BAD$

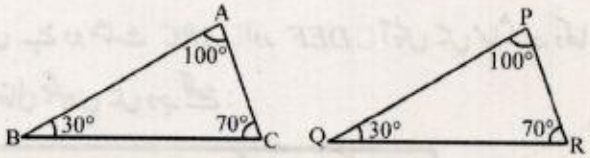


-4 دی گئی تصویر میں دکھایئے کہ کیا $\triangle DBA \cong \triangle BDC$ (آپ اضلاع کو ناپ سکتے ہیں)

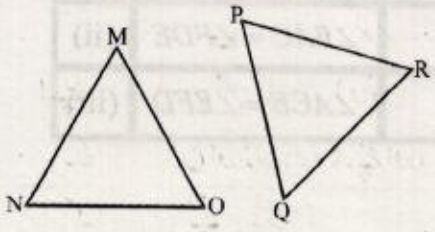
-5 دی گئی تصویر میں $\triangle ABC$ میں $\angle C = 35°$، $\angle A = 40°$ اور ضلع $AB = 2.5$ سینٹی میٹر ہے اور $\triangle DEF$ میں $\angle E = 105°$، $\angle F = 35°$ اور ضلع $DE = 2.5$ سینٹی میٹر تو بتایئے کیا $\triangle ABC \cong \triangle DEF$



-6 (i) ضلعوں کو ناپ کر ناپ لکھئے:

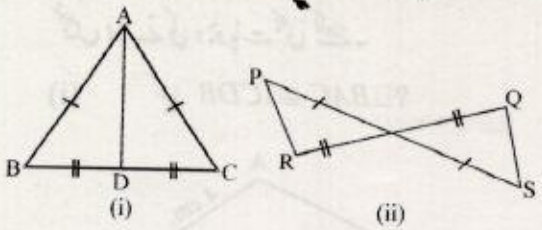


(ii) نیچے دیئے گئے برابر ناپ کے ضلعوں والے مثلثوں کے زاویوں کی پیمائش کیجئے۔



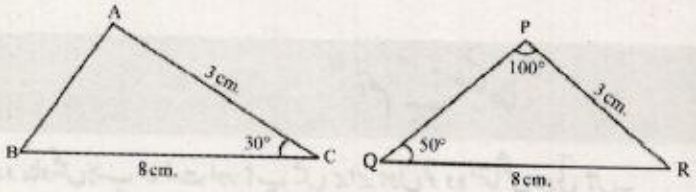
آپ بھی اسی طرح ایک ہی ناپ اور نظیری زاویہ والے مثلث اپنی کاپی میں بنایئے اور بتایئے کہ دونوں میں سے کون سے مثلث ہمیشہ مماثلت ہوتے ہیں۔

7- نیچے دی گئی تصویروں میں متماثل مثلثوں کے جوڑے پہچان کر لکھئے۔ اس میں سے ایک مثلث کے اضلاع، زاویے، ان کے نظیری اضلاع اور زاویے متماثل مثلث میں سے الگ کر کے لکھئے۔

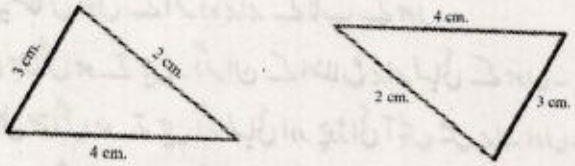


8- نیچے کچھ متماثل مثلثوں کے جوڑے دیئے گئے ہیں۔ یہ کس قاعدے کے مطابق متماثل ہیں، لکھئے۔

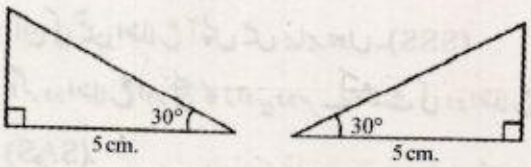
(i)



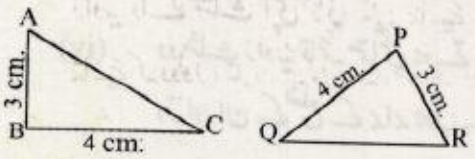
(ii)



(iii)

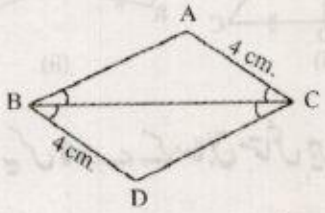


9- نیچے دو مثلث دیئے گئے ہیں، دیکھ کر بتاؤ کیا یہ متماثل ہیں؟ ہاں یا نہیں۔ اپنے جواب کی وجہ بھی بتایئے۔ (دونوں مثلثوں کے سبھی اضلاع اور زاویے کو ناپئے اور دیکھئے کہ آپ کس نتیجے پر پہنچے؟)

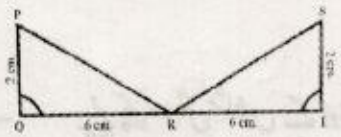


-10 نیچے دی گئی ہر تصویر میں دیئے گئے مثلثوں کے مماثلت ہونے کی جانچ کیجئے اور ان کے مماثلت ہونے یا نہیں ہونے کی وجوہات بھی لکھئے۔

(i) کیا $\triangle BAC \cong \triangle CDB$ ؟



(ii) $\triangle RPQ \cong \triangle RST$ ؟



ہم نے سیکھا

-1 دو بناوٹیں جب ساخت اور ناپ میں برابر ہوں تو وہ متماثل ہوتی ہیں۔

-2 دو برابر لمبائی کے قطعہ خط آپس میں متماثل ہوں گے۔

-3 دو زاویہ متماثل ہوں گے اگر وہ برابر کے ناپ کے ہوں۔

-4 دو مربع متماثل ہوتے ہیں۔ اگر ان کے اضلاع برابر لمبائی کے ہوں۔

-5 دو مستطیل متماثل ہوتے ہیں اگر لمبائی اور چوڑائی آپس میں برابر ہوں۔

-6 دو دائرے متماثل ہوتے ہیں اگر ان کے نصف قطر برابر ناپ کے ہوں۔

-7 دو مثلث مماثلت ہوتے ہیں۔ اگر

(i) اُن کی تین اضلاع آپس میں برابر ہوں۔(SSS)

(ii) اگر دو اضلاع اور بیچ کا زاویہ دوسرے مثلث کی دو اضلاع اور ان کے بیچ زاویہ کے برابر ہوں۔ (SAS)

(iii) اگر دو زاویہ اور ان کے بیچ کا ضلع دوسرے مثلث کے دو زاویے اور ان کے بیچ کے ضلع کے برابر ہوں۔ (ASA)

(iv) دو مثلث زاویۂ قائمہ متماثل ہوتے ہیں اگر ایک مثلث کا وتر اور ایک ضلع دوسرے مثلث کے وتر اور ان کے ضلع کے برابر ہوں۔ (RHS)

S.S.A. 2014-15 (FREE)

باب: 8

قوت نما (Power)

تمہید: 8.1

آپ سبھی جانتے ہیں کہ شطرنج کے کھیل کی ایجاد ہندوستان میں ہوئی تھی۔ اس سے جڑی ایک دلچسپ کہانی اس طرح ہے۔ جب یہاں کے راجا کو معلوم ہوا کہ اس دانشمندانہ کھیل کا موجد انھیں کی ریاست کا ایک دانشور ہے۔ تو موجد کو بلا کر راجا نے کہا۔ میں تمھارے اس انوکھے ایجاد کے لیے تمھیں انعام دینا چاہتا ہوں۔ اسے سن کر اس دانشور نے اپنا سر جھکا دیا۔

راجا نے کہا۔ میرے پاس بے پناہ دولت ہے۔ میں تمھاری کوئی بھی خواہش پوری کر سکتا ہوں۔ مانگو جو تمھاری خواہش ہو۔ ڈرو مت۔

دانشور نے کہا۔ بادشاہ سلامت آپ کی فیاضی عظیم ہے۔ آپ مجھے شطرنج کے پہلے خانہ کے لیے گیہوں کا ایک دانہ دینے کا حکم صادر کیجئے۔ دوسرے خانہ کے لیے دو دانہ دینے، تیسرے خانہ کے لیے 4، چوتھے خانہ کے لیے 8، پانچویں خانہ کے لیے 16، آٹھویں گھر کے لیے 32 .....بس کرو .....راجا نے غصہ ہو کر اسے بیچ میں روک دیا۔

تمھیں شطرنج کے پورے 64 خانے کے لیے دانہ مل جائیں گے۔ ہر گھر میں دانے کی تعداد پچھلے گھر سے دوگنی ہونی چاہیے۔ یہی تمھاری شرط ہے نا۔ پھر بھی یہ جان لو کہ اتنا چھوٹا انعام مانگ کر تم ہماری فیاضی و سخاوت کی توہین کر رہے ہو۔

کیا آپ بتا سکتے ہیں کہ 64 ویں خانے میں راجا کے کتنے دانے دینے پڑیں گے؟

گنتی بہت بڑی ہوتی جا رہی ہے۔ لیکن دلچسپ بات یہ ہے کہ یہاں 2 کا 2 کے ساتھ بار بار ضرب کرنا پر رہا ہے۔ جیسے:

پہلے خانہ میں دانہ	:	1
دوسرے خانہ میں دانہ	:	2
تیسرے خانہ میں دانہ	:	2×2

چوتھے خانہ میں دانہ : $2\times2\times2$

پانچویں خانہ میں دانہ : $2\times2\times2\times2$

چھٹے خانہ میں دانہ : $2\times2\times$ ..... 5 بار

..... : .....

..... : .....

اسی طرح

چوسٹھویں خانہ میں دانہ : $2\times2\times$ ..... 63 بار

یقیناً یہ عدد بہت بڑا ہوگا۔ لیکن کیا آپ کہانی کا اختتام جاننا نہیں چاہیں گے؟ کیا راجا موجد کو یہ انعام و اکرام دے سکا؟ موجد کو 9223372036854775808 دانے گیہوں کے دینے پڑیں گے اور پوری زمین پر اگر گیہوں کی کھیتی کی جائے تب بھی اتنا گیہوں نہیں ملے گا۔ اب آپ ہی سوچئے کہ یہ ہے نا ایک بہت بڑا عدد۔

$2\times2\times$..... 63 بار کرنے پر کتنا بڑا عدد حاصل ہوگا؟ تو کیا کسی عدد میں اُسی عدد سے بار بار ضرب کرنے کے عمل کو لکھنے کا کوئی اور طریقہ نہیں ہے؟

8.2 - قوت نما یا قوت (Exponent or Power)

جماعت کے سبھی طلبا یہی سوچ رہے تھے کہ کسی عدد کا اس عدد کے ساتھ ضرب کرنے کے عمل کا استعمال ریاضی میں اور کہاں کیا گیا ہے؟

تبھی رسیدہ نے ہمانشو سے کہا۔ ''ہم رقبہ نکالنے میں اکائی کو سیمی × سیمی = سیمی^2 لکھتے ہیں۔ اسی طرح حجم نکالتے وقت بھی اکائی کو سیمی × سیمی × سیمی = سیمی^3 لکھتے ہیں۔ کیا اسی طرح $2\times2\times2$ کو 2^3 نہیں لکھا جا سکتا؟

رسیدہ نے کسی عدد کو اُسی عدد سے بار بار ضرب کرنے کو مختصر صورت میں لکھنے کا ٹھیک طریقہ بتایا۔ کیا آپ $5\times5\times5\times5\times5\times5$ کو اختصار میں لکھ سکتے ہیں؟

جس طرح $5\times5\times5\times5\times5\times5 = 5^6$ ہے۔

اسی طرح $a = a\times a\times a\times a\times a\times a$

اور $x^4 = x\times x\times x\times x$ ہوتا ہے۔

آپ بھی کسی عدد کا اُسی عدد کے ساتھ بار بار ضرب کو اختصار میں لکھئے :

(i) $x \times x \times x \times x \times x \times x \times x \times x \times x \times x$ = ...

(ii) $r \times r \times r \times r \times r$ = ...

(iii) $17 \times 17 \times 17 \times 17 \times 17 \times 17 \times 17 \times 17 \times 17$ = ...

(iv) $101 \times 101 \times 101 \times 101 \times 101$ = ...

کسی عدد کا اُسی عدد کے ساتھ بار بار ضرب کرنے کو آپ اختصار میں لکھنا سیکھ چکے ہیں۔ اس مختصر صورت کو ہم قوت نمائی علامت بھی کہتے ہیں۔ آیئے دیکھیں کہ انھیں کس طرح سے پڑھا جاتا ہے۔

یہاں 10^3 میں 10 قاعدہ Base اور '3' قوت نما (Exponent Index) کہلاتا ہے

10^3 اسے 10 کے اوپر قوت نما 3 پڑھا جاتا ہے۔ ساتھ ہی ''10 کی تیسری قوت نما'' بھی کہتے ہیں۔

10^3 کو 1000 کا قوت نمائی صورت (Exponential Form) کہا جاتا ہے۔ یعنی 1000 کو قوت نما کا استعمال کر کے مختصر شکل (10^3) میں لکھ سکتے ہیں۔

کچھ قوت نما کے خاص نام بھی ہیں :

جیسے : 5^2 جو 5 کے اوپر قوت نما ہے، اسے 5 کا مربع (5 Squared) بھی پڑھا جاتا ہے۔

5^3 جو 5 کے اوپر قوت نما ہے، اسے 5 کا مکعب (5 Cubed) بھی پڑھا جاتا ہے۔

خود کر کے دیکھئے :

نیچے لکھے عبارتوں کی بنیاد اور قوت نما کو ان کے سامنے دیئے گئے جگہوں میں لکھئے :

3^5 میں قاعدہ = 3 اور قوت نما = ۵

7^{19} میں قاعدہ = ... اور قوت نما = ...

x^a میں قاعدہ = ... اور قوت نما = ...

p^q میں قاعدہ = ... اور قوت نما = ...

x^y میں قاعدہ = ... اور قوت نما = ...

اب آپ سمجھ چکے ہوں گے کہ قوت نمائی صورت میں لکھنے کا خاص طور سے مقصد کسی بہت بڑے عدد کو مختصر صورت میں لکھنا ہے۔

جیسے سورج سے زمین کی دوری 150000000 کیلومیٹر ہے جو ایک بہت بڑا عدد ہے۔ اسے ذیل کے طریقوں سے لکھ سکتے ہیں:

150000000 کیلومیٹر $= 15\times10\times10\times10\times10\times10\times10\times10 = 15\times10^{7}$ کیلومیٹر

بڑی شکل کو چھوٹی شکل یعنی اختصار میں لکھنا تو آپ سیکھ چکے ہیں۔ اب کچھ قوت نمائی صورت کو پھیلی شکل طویل شکل میں لکھئے:

1. $a^{5} = a\times a\times a\times a\times a$
2. $3^{6} =$
3. $5^{5} =$
4. $r^{7} =$
5. $2^{m} =$

رحیم کو یہ سمجھ میں نہیں آرہا تھا کہ وہ 2^{m} کو طویل شکل میں کیسے لکھیں؟ کیوں کہ m کی کوئی طے شدہ قیمت نہیں ہے۔ کیا آپ کے پاس رحیم کے مسئلہ کا جواب ہے؟

پہلے بھی آپ نے دیکھا ہے کہ شطرنج کے 64 ویں خانہ میں راجا کو 2^{63} یعنی 63، $2\times2\times2\times\ldots\ldots$ بار دانے گیہوں کے دانے دینے تھے۔

$2^{m} = 2\times2\times2\times\ldots\ldots m$ بار لکھ سکتے ہیں۔

اسی طرح ہم x^{m} اور y^{n} کو درج ذیل طریقوں سے لکھ سکتے ہیں۔

$y^{m} = x\times x\times x\times\ldots\ldots m$ بار اور

$y^{n} = y\times y\times\ldots\ldots n$ بار لکھ سکتے ہیں۔

کسی عدد کی قوت نمائی صورت اس کے غیر منقسم اجزائے ضربی کی قوت نما کے حاصل ضرب کی شکل میں ظاہر کیا جا سکتا ہے۔ مثال کے طور پر $1000 = 2\times2\times2\times5\times5\times5\ldots\ldots$ (غیر منقسم اجزائے ضربی) $= 2^{3}\times5^{3}$ (غیر مقسوم اجزائے ضربی کی قوت نما کے حاصل ضرب والی شکل)

مثال: 1- 64 کو 2 کی قوت نما کی شکل میں لکھئے۔

حل: $64 = 2\times2\times2\times2\times2\times2$

اس لیے ہم کہہ سکتے ہیں کہ $64 = 2^{6}$

مثال:2- 8^2 اور 2^8 میں کون بڑا ہے؟

حل: $8^2 = 8 \times 8 = 64$

$2^8 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 256$ ہے۔ ظاہراً $2^8 > 8^2$

مثال:3- (1^6) کی قیمت معلوم کیجئے۔

$(1^6) = 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 = 1$ (حقیقت میں 1 کا کوئی بھی قوت نما 1 کے برابر ہوتا ہے)

مثال:4- مندرجہ ذیل اعداد کو غیر مقسوم اجزائے ضربی کی قوت نما کے حاصل ضرب کی شکل میں لکھئے:

(i) 144 (ii) 216

(i) $144 = 72 \times 2$

$= 36 \times 2 \times 2$

$= 18 \times 2 \times 2 \times 2$

$= 9 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$

$= 3 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$

$= 3^2 \times 2^4$ (مطلوب شکل)

(ii) $216 = 108 \times 2$

$= 54 \times 2 \times 2$

$= 27 \times 2 \times 2 \times 2$

$= 9 \times 3 \times 2 \times 2 \times 2$

$= 3 \times 3 \times 3 \times 2 \times 2 \times 2$

$= 3^3 \times 2^3$ (مطلوب شکل)

بنیاد منفی عدد صحیح بھی ہوسکتا ہے۔

جیسے: $-8 = (-2) \times (-2) \times (-2) = (-2)^3$ ہے۔

$16 = (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) = (-2)^4$ ہے۔

ظاہر ہے کہ قاعدہ منفی عددِ صحیح ہونے پر جب قوت نما طاق عدد ہو تو قیمت منفی عددِ صحیح حاصل ہوتا ہے اور جب قوت نما جفت عدد ہو تو قیمت مثبت عدد صحیح حاصل عدد ہوتا ہے۔

مثال:5- مندرجہ ذیل کی قیمت (Value) معلوم کیجئے۔

(i) $(-1)^5$ (ii) $(-1)^4$ (iii) $(-10)^4$ (iv) $(-5)^3$

حل: (i) $(-1)^5 = (-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) = -1$

(ii) $(-1)^4 = (-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) = +1$

$(-10)^4 = (-10)\times(-10)\times(-10)\times(-10) = 100\times(-10)\times(-10)$ (iii)

$= 100\times 100 = 10000$

$(-5)^3 = (-5)\times(-5)\times(-5) = 25\times(-5) - 125$ (iv)

سوالنامہ : 8.1

-1 مندرجہ ذیل کو قوت نمائی شکل میں لکھئے:

(i) $5\times5\times5\times5$ (ii) $c\times c\times c$ (iii) $2\times2\times3\times3\times3$

(iv) $6\times6\times b\times b$ (v) $a\times a\times b\times b\times b\times b\times d$

-2 مندرجہ ذیل کی قیمت معلوم کیجئے:

(i) 3^3 (ii) 6^4 (iii) 9^3 (iv) 5^4 (v) 4^4

-3 مندرجہ ذیل اعداد میں سے ہر ایک کو قوت نمائی علامتوں میں لکھئے:

(i) 343 (ii) 512 (iii) 729 (iv) 3125

-4 مندرجہ ذیل میں سے ہر ایک میں کون بڑا ہے؟

(i) 4^3 یا 3^4 (ii) 2^5 یا 5^2 (iii) 2^8 یا 8^2 (iv) 100^2 یا 2^{100}

-5 مندرجہ ذیل میں سے ہر ایک کو ان غیر منقسم اجزائے ضربی کی قوت نمائی کے حاصل ضرب کی شکل میں لکھئے:

(i) 1200 (ii) 720 (iii) 1080

(iv) 2250 (v) 3600

-6 سہل کیجئے:

(i) 3×10^2 (ii) $7^2\times3^2$ (iii) $(-1)^5\times7^3$

(iv) 0×10^2 (v) $3^4\times2^3$ (vi) $3^2\times10^4$

-7 سہل کیجئے:

(i) $(-3)^3$ (ii) $(-1)\times(-2)^3$ (iii) $(-4)^2\times(-3)^2$

(iv) $(-2)^3\times(-10)^4$ (v) $(-5)^2\times(-2)^4$

8- درج ذیل اعداد کا موازنہ کیجئے:

(i) $5\times10^{14};4\times10^{7}$ (ii) 2.6×10^{12} 1.6×10^{8}

(iii) $2.7\times10^{11};3.0\times10^{15}$ (iv) 1.008×10^{15} 2.009×10^{20}

9- مندرجہ ذیل کو قوت نمائی شکل میں لکھئے:

(i) $\frac{8}{729}$ (ii) $\frac{81}{343}$ (iii) $\frac{243}{1024}$

8.3- قوت نما کے اصول

8.3.1- ایک ہی قاعدہ والے قوت نما

آپ جانتے ہیں کہ $2^5 = 2\times2\times2\times2\times2$ ہوتا ہے۔ اس میں 2 کے مضروبوں کا الگ الگ مجموعہ بنا کر کئی طرح سے لکھ سکتے ہیں۔ جیسے:

$2^5 = (2\times2\times2\times2) = 2^1\times2^4$

$2^5 = (2\times2)(2\times2\times2) = 2^2\times2^3$

$2^5 = (2\times2\times2)\times(2\times2) = 2^3\times2^2$

$2^5 = (2\times2\times2\times2)\times(\times2) = 2^4\times2^1$

یہاں 2^5 کو 2 کے قاعدہ والی عبارتوں میں کئی طرح سے لکھا گیا ہے۔ آپ بھی نیچے دیئے گئے قوت نما عبارتوں کو یکساں بنیاد والے دو عبارتوں کے مضروبوں کی شکل میں لکھئے اور قوت نما کا حاصل جمع حاصل کیجئے:

نمبر شمار	قوت نما عبارت	طویل شکل میں لکھ کر دو مجموعوں میں بانٹنا (مجموعہ اپنی خواہش کے مطابق بنایئے)	ہر مجموعہ کو قوت نما عبارت کی شکل میں لکھئے	قوت نما کا حاصل جمع
-1	a^7	$\underline{a\times a\times a}\times\underline{a\times a\times a\times a}$	$a^4\times a^3$	4+3=7
-2	x^5			
-3	y^{10}			
-4	27^7			
-5	7^{12}			

اوپر قوت نما عبارتوں کی طویل ہوئی شکل کو دیکھئے اور نیچے دی ہوئی خالی جگہوں کو بھریئے:

$a^7 = a^5 \times \boxed{a^2}$ $\quad x^5 = x^3 \times \square$ $\quad y^{10} = y^7 \times \square$

$27^7 = 27^4 \times \square$ $\quad 7^{12} = 7^8 \times \square$

کیا دو یکساں قاعدہ والے اعداد کا ضرب کرنے پر ان اعداد کے قوت نما کا حاصل ضرب والے عدد کے قوت نما سے کوئی تعلق ہے؟

آیئے دیکھیں کہ یکساں قاعدہ والے قوت نمائی عبارتوں کا ضرب کیسے ہوتا ہے؟

$x^3 \times x^4 = \quad x \times x \times x \times x \times x \times x \times x \quad = x^7 \quad = x^{(3+4)}$

$x^5 \times x^3 = \quad x \times x \times x \times x \times x \times x \times x \times x \quad = x^8 \quad = x^{(5+3)}$

$y^{19} \times y^{21} = \quad (y \times y \times \ldots\ldots \text{بار } 19) \times (y \times y \times \ldots\ldots \text{بار } 21)$

کیا آپ بتا سکتے ہیں کہ اوپر y کا y کے ساتھ کتنی بار ضرب ہوگا؟ حاصل ضرب میں y بنیاد لیں اس کی قوت نما کیا ہوگی؟

y کا y کے ساتھ $19+21=40$ بار ضرب ہو رہا ہے۔

اس لیے حاصل ضرب y^{40} ہوگا۔

اس لیے ہم کہہ سکتے ہیں کہ جب دو یکساں بنیاد والے قوت نمائی اعداد کا ضرب ہوتا ہے تو حاصل ضرب میں بنیاد وہی رہتا ہے۔ اور قوت نما آپس میں جڑ جاتے ہیں۔

جیسے: $3^{99} \times 3^{13} = 3^{(99+13)} = 3^{112}$

کیا آپ $x^m \times x^n$ کا حاصل ضرب بتا سکتے ہیں؟

$x^m \times x^n = x \times x \ldots\ldots m$ بار اور n بار یعنی $(m+n)$ بار ضرب ہو رہا ہے۔

اس لیے $x^m \times x^n = x^{m+n}$ (اصول 1:)

خود کر کے دیکھئے:

(i)	$3^3 \times 3^4 = 3^{\square}$	(ii)	$(-12)^2 \times (-12)^6 =$	$-12^{\square}$	
(iii)	$b^2 \times b^3 = b^{\square}$	(iv)	$c^{10} \times c^{20} = c^{\square}$		
(v)	$p^3 \times p^2 = p^{\square}$	(vi)	$a^3 \times a^2 \times a^7 = a^{\square}$		

8.3.2- ایک ہی قاعدہ والے قوت نما اعداد کی تقسیم

فاطمہ نے سونو سے پوچھا، یکساں قاعدہ والے قوت نما اعداد کو ضرب کرنا تو ہم نے سیکھ لیا، یکساں قاعدہ والے قوت نما اعداد کی تقسیم کیسے کریں گے؟

سونو نے کہا، چلو کر کے دیکھتے ہیں:

$$\frac{2^7}{2^5} = \frac{2\times2\times2\times2\times2\times2\times2}{2\times2\times2\times2\times2} = 2\times2 = 2^2$$

رینا اور جمال نے بھی اسی طرح کے سوال حل کیے۔

(i) $\frac{3^5}{3^2} = \frac{3\times3\times3\times3\times3}{3\times3} = 3\times3\times3 = 3^3$

(ii) $\frac{7^9}{7^6} = \frac{7\times7\times7\times7\times7\times7\times7\times7\times7}{7\times7\times7\times7\times7\times7} = 7\times7\times7 = 7^3$

فاطمہ نے سبھی حلوں کو دیکھ کر ساتھیوں سے کہا کہ جس طرح دو یکساں قاعدہ والے قوت نما اعداد کا ضرب کرنے پر قوت نما جڑتے ہیں۔ اُسی طرح دو یکساں قاعدہ والے قوت نما اعداد میں تقسیمی عمل کرنے پر شمار کنندہ کے قوت نما میں سے نسب نما کا قوت نما گھٹا دیتے ہیں۔

جیسے:

$2^7 \div 2^5$ کے حاصل تقسیم کا قوت نما $7-5=2$ ہوتا ہے، $3^5 \div 3^2$ کے حاصل تقسیم کا قوت نما $5-2=3$ اور $7^9 \div 7^6$ کے حاصل تقسیم کا قوت نما $9-6=3$ ہے۔ یعنی

$a^m \div a^n$ کے حاصل تقسیم کا قوت نما $m-n$ ہوگا۔

یعنی $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ (اصول 2:)

تبھی مونو نے کہا، یہ تو ٹھیک ہے لیکن اگر مقسوم اور مقسوم علیہ (تقسیم کرنے والا عدد) کے قوت نما اعداد یکساں ہو تو کیا ہوگا؟ چلو حل کر کے دیکھیں۔

جیسے:

$\frac{7^5}{7^5} = 7^{5-5} = 7^0$ لیکن $\frac{7^5}{7^5} = \frac{7\times7\times7\times7\times7}{7\times7\times7\times7\times7} = 1$ $\therefore 7^0 = 1$

جیسے :

$\frac{p^n}{p^n} = 1$ ہوگا لیکن فارمولے کے مطابق

$$\frac{p^n}{p^n} = p^{n-n} = p^0$$

$p^0 = 1$ (اصول : 3)

اب ذرا ذیل کے اعداد پر غور کریں :

$\frac{1}{5^2} = \frac{5^0}{5^2} = 5^{0-2} = 5^{-2}$ ($5^0 = 1$ سے)

$\frac{1}{6^{35}} = \frac{6^0}{6^{35}} = 6^{0-35} = 6^{-35}$ ($6^0 = 1$ سے)

$\frac{1}{4^{90}} = \frac{4^0}{4^{90}} = 4^{0-90} = 4^{-90}$ ($4^0 = 1$ سے)

ان سوالوں کو دیکھتے ہوئے فاطمہ نے غور کیا کہ اگر قوت نما اعداد میں مقسوم علیہ میں مقسوم کی جگہ پر لے جائیں تو ان کی قوت نما کی علامت منفی ہو جاتا ہے۔ یعنی اگر ہمارے پاس

$\frac{1}{a^4}$ ہو تب $\frac{1}{a^4} = \frac{a^0}{a^4} = a^{0-4} = a^{-4}$

اگر $\frac{1}{a^m}$ ہو تب $\frac{1}{a^m} = \frac{a^0}{a^m} = a^{0-m} = a^{-m}$

اس لیے $\frac{1}{a^{-m}} = a^m$

لیکن اگر مقسوم کو مقسوم علیہ میں لے جائیں تو کیا ہوگا؟ جیسا ہم نے اوپر مثالوں میں دیکھا ہے۔

$\frac{1}{7^{-3}} = 7^3$ یا $\frac{1}{a^{-4}} = a^4$ یا $\frac{1}{a^{-m}} = a^m$ اس کا مطلب یہ ہے کہ جب قوت نما میں مقسوم کو مقسوم علیہ میں لے جائیں گے تب بھی قوت نما کی علامت بدل جائے گی۔

خود کر کے دیکھئے :

(i)	$10^8 \div 10^3$	=	$10^{\square}$	(ii)	$9^8 \div 9^7$	=	$9^{\square}$
(iii)	$21^{15} \div 21^{13}$	=	$21^{\square}$	(iv)	$b^{10} \div b^8$	=	$b^{\square}$
(v)	$d^{100} \div d^{80}$	=	$d^{\square}$	(vi)			

8.3.3- ایک قوت نما عدد پر قوت نما لینا

ذیل کی مثالوں پر دھیان دیجئے:

(i) $(2^3)^2$ کو سہل کیجئے۔

حل: $(2^3)^3 = 2^3 \times 2^3$

$= 2^{3+3}$ (چونکہ $a^m \times a^n = a^{m+n}$ ہے)

$= 2^6$

$= 2^{3\times 2}$

(ii) $(3^4)^2$ کو سہل کیجئے۔

$(3^4)^2 = 3^4 \times 3^4$

$= 3^{4+4}$

$= 3^8$

$= 3^{4\times 2}$

(iii) $(3^m)^3 = = a^m \times a^m \times a^m$

$= a^{m+m+m}$

$= a^{3m}$

$= 3^{3\times m}$

مندرجہ بالا سے ہم وسیع صورت سے کہہ سکتے ہیں کہ کسی غیر صفر عدد صحیح 'a' کے لیے $(a^m)^n = a^{m\times n}$ ہوتا ہے جہاں m اور n مکمل اعداد ہیں۔

خود کر کے دیکھئے:

سہل کر کے جواب کو قوت نمائی شکل میں لکھئے:

(i)	$(7^2)^3$	(ii)	$(2^2)^{50}$	(iii)	$(7^{50})^3$
(iv)	$(a^3)^2$	(v)	(4^3)	(vi)	$(d^4)^8$

8.3.4- یکساں قوت نما والی قوت نما اعداد کا ضرب

ذیل کی مثالوں کو دیکھئے:

(i) $2^4 \times 3^4$ کو سہل کیجئے۔

$2^4 \times 3^4 = (2\times 2\times 2\times 2)\times(3\times 3\times 3\times 3)$

$= (2\times 3)\times(2\times 3)\times(2\times 3)\times(2\times 3)$

$= 6\times 6\times 6\times 6$

$= 6^4$

یہاں قاعدہ 6 قاعدہ 2 اور 3 کا حاصل ضرب ہے۔

(ii) $4^3 \times 3^3$ کو سہل کیجئے۔

$$4^3 \times 3^3 = (4\times4\times4)\times(3\times3\times3)$$
$$= (4\times3)\times(4\times3)\times(4\times3)$$
$$= 12\times12\times12$$
$$= 12^3$$

یہاں 12 قاعدہ 4 اور 3 کا حاصل ضرب ہے۔

(iii) $3^3 \times a^3$ کو سہل کیجئے۔

$$3^3 \times a^3 = (3\times3\times3)\times(a\times a\times a)$$
$$= (3\times a)\times(3\times a)\times(3\times a)$$
$$= (3a)^3$$

یہاں $(3\times a = (3a)^3)$

(iv) $(a^3 \times b^3)$ کو سہل کیجئے۔

$$a^3 \times b^3 = (a\times a\times a)\times(b\times b\times b)$$
$$= (a\times b)\times(a\times b)\times(a\times b)$$
$$= (a\times b)^3$$
$$= (ab)^3$$

(یہاں $a\times b = ab$ ہے)۔

وسیع حالت میں کسی غیر صفر (Non-Zero) عدد صحیح کے لیے $a^m \times b^m = (ab)^m$ ہوتا ہے۔ جہاں m ایک عدد صحیح ہے۔

مثال: 6 - ذیل کے ارکان کو قوت نمائی شکل میں لکھئے:

(i) $(5\times4)^3$ (ii) $(4a)^5$ (iii) $(-3n)^3$

حل:

(i) $(5\times4)^3 = (5\times4)\times(5\times4)\times(5\times4)$
$$= (5\times5\times5)\times(4\times4\times4)$$
$$= 5^3 \times 4^3$$

(ii) $(4a)^5 = 4a\times4a\times4a\times4a\times4a$
$$= (4\times4\times4\times4\times4)\times(a\times a\times a\times a\times a) \quad = 4^5 \times 4^5$$

(iii) $(-3n)^3 = (-3\times n)^3$

$= (-3\times n)(-3\times n)(-3\times n)$

$= (-3\times -3\times -3)\times(n\times n\times n)$

$= -3^3 \times n^3$

خود کر کے دیکھئے:

$a^m \times b^m = (ab)^m$ کا استعمال کر کے شکل بدلئے۔

(i)	$5^3\times 2^3$	(ii)	$3^2\times b^2$	(iii)	$a^2\times c^2$
(iv)	$4^6\times(-2)^6$	(v)	$(-2^4)\times(-3)^4$	(vi)	$(ab)^3$
(vii)	$(-2p)^3$	(viii)	$(2c)^4$	(ix)	$(2\times 3)^5$

8.3.5- قابل پیمائش اعداد کے قوت نما

قابل پیمائش اعداد کے کچھ قوت نما پر غور کیجئے:

$$\left(\frac{5}{7}\right)^4 = \frac{5}{7}\times\frac{5}{7}\times\frac{5}{7}\times\frac{5}{7}$$

$$= \frac{5}{7}\times\frac{5}{7}\times\frac{5}{7}\times\frac{5}{7} = \frac{5^4}{7^7}$$

$$\left(-\frac{3}{11}\right)^5 = (-1)^5\times\left(\frac{3}{11}\right)^5$$

$$= -1\times\frac{3}{11}\times\frac{3}{11}\times\frac{3}{11}\times\frac{3}{11}\times\frac{3}{11} = -1\times\frac{3\times3\times3\times3\times3}{11\times11\times11\times11\times11}$$

$$= -1\times\frac{3^5}{11^5} \qquad = -\frac{3^5}{11^5}$$

8.3.6- یکساں قوت نما والے قوت نما اعداد کی تقسیم

ذیل کی مثالوں پر غور کیجئے:

(i) $\frac{3^4}{5^4} = \frac{3\times3\times3\times3}{5\times5\times5\times5} = \frac{3}{5}\times\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}\times\frac{3}{5} = \left(\frac{3}{5}\right)^4$

(ii) $\frac{a^5}{b^5}=\frac{a\times a\times a\times a\times a}{b\times b\times b\times b\times b}=\frac{a}{b}\times\frac{a}{b}\times\frac{a}{b}\times\frac{a}{b}\times\frac{a}{b}=\left(\frac{a}{b}\right)^5$

وسیع شکل میں $a^m\div b^m=\frac{a^m}{b^m}=\left(\frac{a}{b}\right)^m$ جہاں a اور b کوئی دو غیر صفر (Non-Zero) عدد صحیح ہیں۔

اور m اور n ایک مکمل عدد ہے۔

مثال: 7 درج ذیل کو وسیع شکل میں لکھئے:

(i) $\left(\frac{2}{3}\right)^3$ (ii) $\left(\frac{-2}{5}\right)^4$ (iii) $\left(\frac{p}{q}\right)^5$

حل:

(i) $\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{2^3}{3^3}=\frac{2\times2\times2}{3\times3\times3}$

(ii) $\left(\frac{-2}{5}\right)^4=\frac{(-2)^4}{5^4}=\frac{(-2)\times(-2)\times(-2)\times(-2)}{5\times5\times5\times5}$

(iii) $\left(\frac{p}{q}\right)^5=\frac{p^5}{q^5}=\frac{p\times p\times p\times p\times p}{q\times q\times q\times q\times q}$

8.4 ..... مثال

مثال: 8 $(5^2)\times3$ اور $(5^2)^3$ میں بڑا کون ہے؟

حل: $(5^2)\times3=5\times5\times3$ (5^2 کو 3 سے ضرب)

$=75$

$(5^2)^3=5^2\times5^2\times5^2$ (5^2 کو خود سے 3 بار ضرب)

$=15625$

اس لیے $(5^2)^3>(5^2)\times3$

مثال: 9 $9\times9\times9$ کے لیے قاعدہ 3 لیتے ہوئے اسے قوت نمائی شکل میں لکھئے:

$9\times9\times9=9^3$ $=3^{2\times3}\left(\because (a^m)^n=a^{mn}\right)$ سوال سے:

$=\left(3^2\right)^3$ (کیوں کہ $9=3\times3=3^2$) $=3^6$

مثال: 10- سہل کیجئے اور جواب کو قوت نمائی شکل میں لکھئے:

(i) $\left(\frac{3^7}{3^2}\right)\times3^4$ (ii) $2^3\times2^2\times5^5$ (iii) $\left\{\left(2^3\right)^2\times5^6\right\}\times3^6$

(iv) $8^2\div2^3$ (v) $\left(3^2\times3^4\right)\div3^3$

حل:

(i) $\left(\frac{3^7}{3^2}\right)\times3^4=\left(3^{7-2}\right)\times3^4\ \left(\because \frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}\right)$

$=3^5\times3^4$

$=3^{5+4}\left(\because a^m\times a^n=a^{m+n}\right)$

$=3^9$

(ii) $2^3\times2^2\times5^5=\left(2^3\times2^2\right)\times5^5$

$=2^5\times5^5\left(\because a^m\times a^m=a^{m+n}\right)$

$=(2\times5)^5\left(\therefore a^m\times b^m=(ab)^m\right)$

$=10^5$

(iii) $\left\{\left(2^3\right)^2\times5^6\right\}\times3^6$

$=\left(2^6\times5^6\right)\times3^6\left(\because\left(a^m\right)^n=a^{mn}\right)$

$\left\{(10)^6\times3^6\right\}\ \left(\because a^m\times b^m=(ab)^m\right)$

$=\left(10^3\times3\right)^6$

$=(30)^6$

(iv) $8^2 \div 2^3$

$8 = 2 \times 2 \times 2 = 2^3$

$\therefore 8^2 = \left(2^3\right)^2$

$\therefore 8^2 \div 2^3 = \left(2^3\right)^2 \div 2^3$

$= 2^6 \div 2^3$

$= 2^{6-3} = 2^3$

(v) $= \left(3^2 \times 3^4\right) \div 3^3$

$= \left(3^{2+4}\right) \div 3^3 \quad \left(a^m \times a^n = a^{m+n}\right)$

$= 3^6 \div 3^3 \quad \left(a^m \div a^n = a^{m-n}\right)$

$= 3^{6-3} = 3^3$

مثال: 11- سہل کیجئے:

(i) $\dfrac{2^3 \times 3^4 \times 4}{3 \times 32}$ (ii) $\dfrac{2 \times 3^4 \times 2^5}{9 \times 4^2}$ (iii) $\dfrac{12^4 \times 9^3 \times 4}{6^3 \times 8^2 \times 27}$

(iv) $2^3 \times a^3 \times 5a^4$ (v) $\dfrac{4^5 \times a^8 b^3}{4^5 \times a^5 b^2}$ (vi) $\dfrac{2^8 \times a^5}{4^3 \times a^3}$

حل:

(i) $\dfrac{2^3 \times 3^4 \times 4}{3 \times 32} = \dfrac{2^3 \times 3^4 \times 2^2}{3 \times 2^5} \left(\because 4 = 2^2, 32 = 2^5\right)$

$= \dfrac{2^{3+2} \times 3^4}{3 \times 2^5} = \dfrac{2^5 \times 3^4}{3 \times 2^5}$

$= 2^{5-5} \times 3^{4-1} = 2^0 \times 3^3$

$= 1 \times 27 = 27$

(ii) $= \dfrac{2 \times 3^4 \times 2^5}{9 \times 4^2} = \dfrac{2 \times 3^4 \times 2^5}{3^2 \times \left(2^2\right)^2} = \dfrac{2 \times 2^5 \times 3^4}{3^2 \times 2^{2\times 2}}$

$= \dfrac{2^{1+5} \times 3^4}{2^4 \times 3^2} = \dfrac{2^6 \times 3^4}{2^4 \times 3^2}$

$= 2^{6-4} \times 3^{4-2} = 2^2 \times 3^2 = 4 \times 9 = 36$

(iii) $= \dfrac{12^4 \times 9^3 \times 4}{6^3 \times 8^2 \times 27}$ $= \dfrac{(2^2 \times 3)^4 \times (3^2)^3 \times 2^2}{(2 \times 3)^3 \times (2^3)^2 \times 3^3}$ $= \dfrac{(2^2)^4 \times 3^4 \times 3^{2\times3} \times 2^2}{2^3 \times 3^3 \times 2^{3\times2} \times 3^3}$

$= \dfrac{2^8 \times 2^2 \times 3^4 \times 3^6}{2^3 \times 2^6 \times 3^3 \times 3^3}$ $= \dfrac{2^{8+2} \times 3^{4+6}}{2^{3+6} \times 3^{3+3}}$ $= \dfrac{2^{10} \times 3^{10}}{2^9 \times 3^6}$

$= 2^{10-9} \times 3^{10-6}$ $= 2^1 \times 3^4$ $= 2 \times 81$ $= 162$

(iv) $2^3 \times a^3 \times 5a^4$

$= 2^3 \times a^3 \times 5 \times a^4$

$= 2^3 \times 5 \times a^3 \times a^4$

$= 8 \times 5 \times a^{3+4}$

$= 40a^7$

(v) $= \dfrac{4^5 \times a^8 b^3}{4^5 \times a^5 b^2}$

$= 4^{5-5} \times a^{8-5} \times b^{3-2}$

$= 4^0 \times a^3 \times b^1$

$= 1a^3 b$

$= a^3 b$

(vi) $= \dfrac{2^8 \times a^5}{4^3 \times a^3}$ $= \dfrac{2^8 \times a^5}{(2^2)^3 \times a^3}$ $= \dfrac{2^8 \times a^5}{2^6 \times a^3}$

$= 2^{8-6} \times a^{5-3}$ $= 2^2 a^2$ $= 4a^2$

8.2 : سوالنامہ

-1 سہل کیجئے اور جواب کو قوت نمائی شکل میں لکھئے :

(i) $7^2 \times 7^4 \times 7^8$ (ii) $3^{10} \div 3^6$ (iii) $d^2 \times d^3$

(iv) $5^x \times 5^2$ (v) $(5^3)^2 \div 5^3$ (vi) $3^5 \times 5^5$

(vii) $a^4 \times b^4$ (viii) $(2^{20} \div 2^{10}) \times 2^3$ (ix) $9^p \div 9^3$

-2 سہل کیجئے اور قوت نمائی شکل میں جواب دیجئے :

(i) $\dfrac{2^3 \times 3^4 \times 4}{3^2 \times 32}$ (ii) $\left[(5^3)^2 \times 5^3\right] \div 5^6$ (iii) $25^5 \div 5^4$

(iv) $3^0+4^0+5^0$ (v) $3^0\times4^0\times5^0$ (vi) $\left(4^0+5^0\right)\times2^0$

(vii) $\dfrac{11^6\times13^3\times3}{39\times11^2}$ (viii) $\dfrac{5^7}{5^4\times5^3}$ (ix) $\left(3^3\times3\right)^3$

(x) $\dfrac{5^8\times a^5}{25^3\times a^3}$

3- غیر مقسوم اجزائے ضربی کے قوت نما کے حاصل ضرب کی شکل میں لکھئے:

(i) 1152 (ii) 64×81 (iii) 540

(iv) $27\times48\times72$ (v) $9\times6\times15\times4$

4- نیچے دیئے گئے اقوال میں صحیح اور غلط کو الگ کیجئے اور اپنے جواب کی وجوہات بتایئے:

(i) $10^0=(1000)^8$ (ii) $4^3\times3^2\times12^5$ (iii) $2^5=5^2$

(iv) $10\times10^6=100^6$

5- سہل کیجئے:

(i) $\dfrac{\left(3^2\right)^5\times5^3}{9^4\times5^2}$ (ii) $\dfrac{9^2\times3^2\times a^8}{3^7\times a^3}$ (iii) $\dfrac{3^5\times10^5\times25}{5^7\times6^5}$

8.5- اعشاریہ اعداد کا طریقہ (Decimal Number System)

ہم جانتے ہیں کہ

$$56832=5\times10000+6\times1000+8\times100+3\times10+2\times$$

ہم اسے 10 کے قوت نما کا استعمال کرتے ہوئے قوت نمائی شکل میں ذیل کے طریقوں سے لکھ سکتے ہیں:

$$56832=5\times10^4+6\times10^3+8\times10^2+3\times10^1+2\times10^0$$

دھیان دیجئے، $10=10^1, 100=10^2, 1000=10^3, 10000=10^4$ اور $1=10^0$ ہے۔

یہاں 10 کا قوت نما 4 سے ایک ایک گھٹتے ہوئے 0 تک آ جاتے ہیں۔