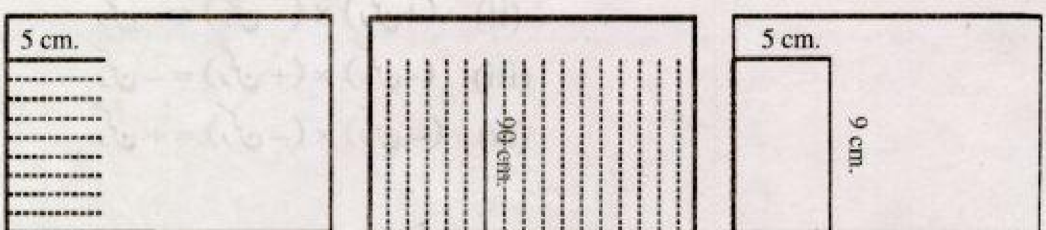
باب-15 گرافوں سے تعارف

15.1 تمہید

ٹیچر نے بلیک بورڈ پر ایک نقطہ لگا دیتی ہے (شکل-1) پھر وہ طالب علموں سے پوچھتی ہے کہ بلیک بورڈ پر درج نقطہ N کو آپ کیسے بتائینگے؟ آپ بھی سوچئے، آپ نقطہ کو کیسے بتائینگے؟ کلاس میں اس کے مختلف جواب ملے۔

شکل-1

کیا اوپر دیئے گئے بیانات میں سے کسی بھی بیان کی بنیاد پر آپ نقطہ کا ٹھیک ٹھیک مقام پا سکتے ہیں؟ واضح ہے کہ جواب نہیں ہے۔ لیکن اگر آپ یہ کہیں کہ نقطہ بلیک بورڈ کے بائیں طرف سے لگ بھگ 5cm دور ہے تو اس سے آپکو نقطہ کے مقام کا اندازہ تو ہو جاتا ہے۔ پھر بھی ٹھیک ٹھیک مقام کا پتہ نہیں چلتا۔ سوچئے کیوں؟ (شکل (a)2)۔ آپ کہہ سکتے ہیں کہ نقطہ بلیک بورڈ کے نچلے کنارے سے 90 سنٹی میٹر کی دوری پر ہے۔ کیا اب بھی ہم نقطہ کا صحیح مقام بتا سکتے ہیں (شکل(2(b))

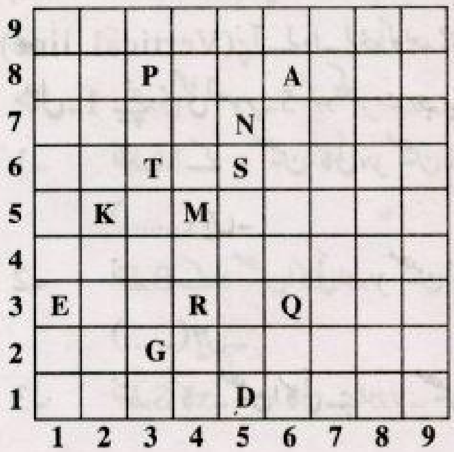


(2a) (2b) (2c)

اوپر کے تصویروں سے واضح ہے کہ ہم بلیک بورڈ کے بائیں کنارے اور سب سے نیچے والے کنارے سے دیئے گئے نقطہ کا مقام متعین کر سکتے ہیں۔

> سوچئے کیا آپ مذکورہ دو جانکاریاں
>
> 1۔ نقطہ بورڈ کے بائیں کنارے سے 5cm دور ہے
>
> 2۔ نقطہ بورڈ کے نچلے کنارے 90cm اوپر ہے
>
> سے بورڈ پر دو الگ الگ نقطے درج کر سکتے ہیں؟

دوسرے الفاظ میں ہم کہہ سکتے ہیں کہ کسی سطح پر نقطہ کے مقام کا تعین کرنے کے لئے دو آزاد معلومات کا ہونا ضروری ہے۔



تصویر۔3

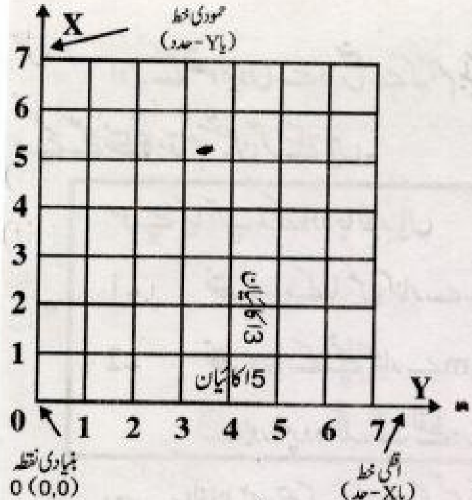
15.2 باہم معین اعداد (co-ordinates)

ایک درجہ میں ہر ایک طالب علم کی میز کو ایک مربع کے شکل میں ظاہر کرتے ہوئے (تصویر۔3) بنائی گئی ہے۔ جس میں کچھ طالب علموں کے نام حرف سے دکھائے گئے ہیں۔ اب ہم M طالب علم کی میز کو ڈھونڈتے ہیں۔ اسکے لئے ہم کو دو اعداد چاہئے۔ آپ سوچئے کہ اگر آپکو M کا مقام بتانا ہو تو آپ کیسے بتائینگے؟

تصویر 3 میں M چوتھے کالم اور پانچویں قطار میں ہے۔ تو M کے مقام کو (4, 5) کی شکل میں ظاہر کیا جا سکتا ہے۔ جہاں پہلا عدد کالم عدد کو دکھاتا ہے اور دوسرا عدد قطار عدد کو دکھاتا ہے۔ آپ باقی طالب علموں کے بیٹھنے کے مقام کو لکھئے۔ مثال کے لئے G طالب علم کا مقام۔ G(3,2) لکھئے۔

تصویر 4 پر دھیان دیجئے کہ نقطہ (5, 3) جسکی دوری بائیں کنارے سے 15 اکائی اور نچلے کنارے سے 3 اکائی ہے۔ گراف کے کاغذ پر کس طرح درج کیا گیا ہے۔

> کہا جاتا ہے کہ عظیم فرانسیسی ریاض داں اپنے دکارتے (Rene Descartes) نے بستر پر لیٹے لیٹے ایک چونٹی کو چھت کے کونے کے پاس چلتے ہوئے دیکھا اور اس نے ایک سطح میں ایک نقطہ کے مقام کا تعین کرنے سے متعلق مسئلے کا حل ڈھونڈ نکالا۔ اس طریقہ کو دکارتے کی یاد میں کارتے طریقہ (Cartesian system) بھی کہا جاتا ہے۔



تصویر-4

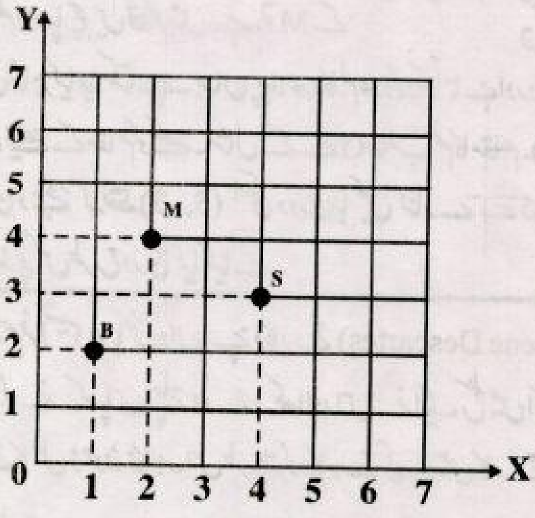
گراف کاغذ پر ہم X ساق (X-axis) اور y-ساق (y-axis) اپنی سہولت کے مطابق دکھاتے ہیں اور جہاں دونوں خطوط ایک دوسرے کو کاٹتے ہیں اسے بنیادی نقطہ (origin) کہا جاتا ہے اور اسے 0 سے دکھایا جاتا ہے۔ عدد 5 نقطہ کا x معین اکائی۔(x-co-ordinate) اور عدد 3، y معین اکائی (y-co-ordinate) کہلاتا ہے اور (5,3) نقطہ کے ''معین اعداد'' ہیں۔ اسطرح سطح پر کسی نقطے کے مقام کو عددی جوڑے کے ذریعہ دکھایا جاتا ہے۔ آسانی کیلئے افقی خط (Horizontal line) پر آنے والے عدد کو پہلے اور عمودی خط (Vertical line) پر آنے والے خط کو بعد میں لکھتے ہیں۔

مثال۔1 نیچے دی گئی تصویر۔5 کو دیکھر مندرجہ بیانات کو پورا کیجئے۔

1۔ نقطہ M کے x معین اکائی، y معین بالترتیب..........اور..........ہیں اسلئے نقطہ M کے معین اعداد (.......) ہیں۔

2۔ نقطہ B کے x معین اکائی اور y معین اکائی بالترتیب..........اور..........ہیں اسلئے نقطہ B کے معین اعداد (......) ہیں۔

3۔ نقطہ S کا x۔ معین اکائی ہے اور y۔ معین اکائی......ہے تو S کے معین اعداد (.........) ہیں۔



تصویر-5

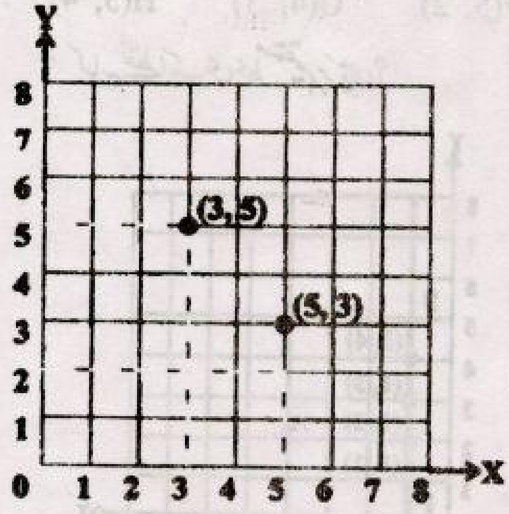
حل:1 کیونکہ y-ساق سے نقطہ M کی دوری 2 اکائی ہے اسلئے نقطہ M کا x معین اکائی 2 ہوگا۔ x-ساق سے نقطہ M کی دوری 4 اکائی ہے اسلئے نقطہ M کا y-معین اکائی 4 ہوگا۔ اسلئے نقطہ M کا معین عدد (2, 4) ہے۔

(ii) نقطہ B کے x اور y معین اکائی بالترتیب 4 اور 3 ہیں۔ اسلئے B کے معین اعداد (4, 3) ہیں۔

(iii) نقطہ S کا x معین اکائی 1 ہے اور y-معین اکائی 2 ہے تو S کے معین اعداد (1, 2) ہیں۔

مثال-2 ایک گراف پر نقطہ (5,3) درج کیجئے کیا یہ وہی نقطہ ہے جو (3,5) دکھاتا ہے۔

حل: سب سے پہلے گراف کاغذ پر x ساق اور y ساق دکھاتے ہیں۔ اب بنیادی نقطہ (0,0) سے شروع کر کے 5 اکائی دائیں چلکر پھر 3 اکائی اوپر کی طرف چلتے ہیں تو نقطہ (5,3) ملتا ہے۔ تصویر 6 سے ظاہر ہے کہ نقطہ (5,3) اور نقطہ (3,5) الگ الگ نقطے ہیں۔



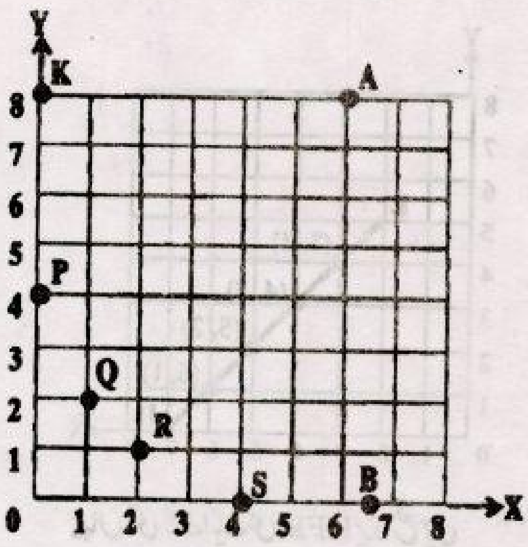
تصویر-6

مثال-3 تصویر 7 دیکھکر مندرجہ ذیل نقطہ کے مقام کے لئے مناسب حرف چنیے۔

(i) (2,1) (ii) (1,2) (iii) (0,4) (iv) (4,0)

اور مندرجہ ذیل لفظوں کے لئے معین اعداد لکھئے۔

(v) A (vi) B (vii) K



تصویر-7

حل:- (i) (2,1) ہے نقطہ R

(ii) (1,2) ہے نقطہ Q

(iii) (0,4) ہے نقطہ P

(iv) (4,0) ہے نقطہ S

(v) نقطہ A معین اعداد (6,8) ہیں

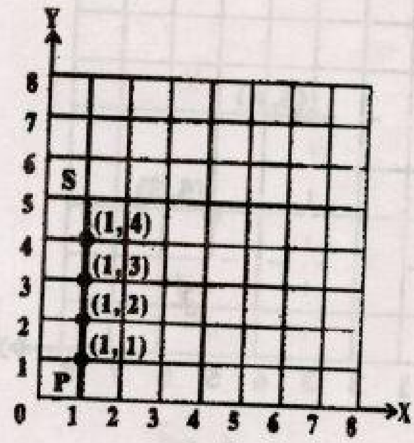
(vi) نقطہ B کے معین اعداد (6.5,0) ہیں

(vii) نقطہ K کے معین اعداد (0,8) ہیں

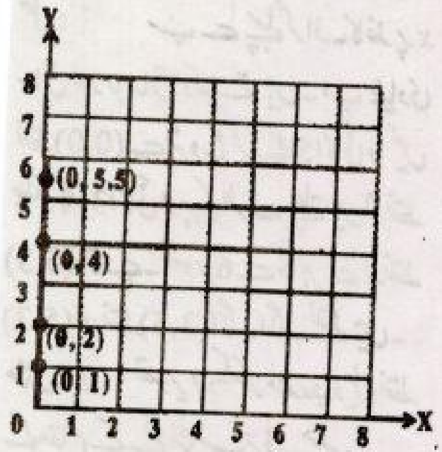
مثال-4 گراف پیپر پر درج ذیل نقطوں کو دکھائیں۔

(i)	(0, 1)	(0, 2)	(0, 4)	(0, 5.5)
(ii)	P(1, 1)	Q(1, 2)	R(1, 3)	S(1, 4)
(iii)	A(1, 4)	B(2, 4)	C(3, 4)	D(4, 4)
(iv)	E(6, 1)	F(5, 2)	G(4, 3)	H(3, 4)

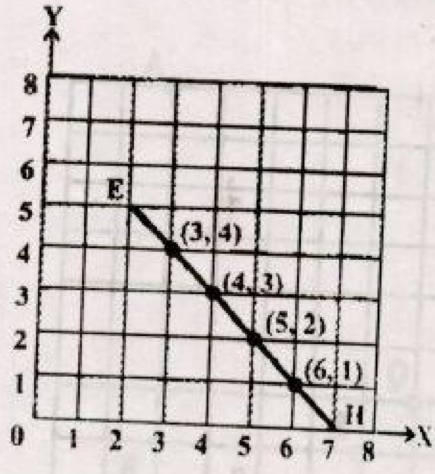
کیا یہ نقطے ایک ہی خط مستقیم پر ہیں؟



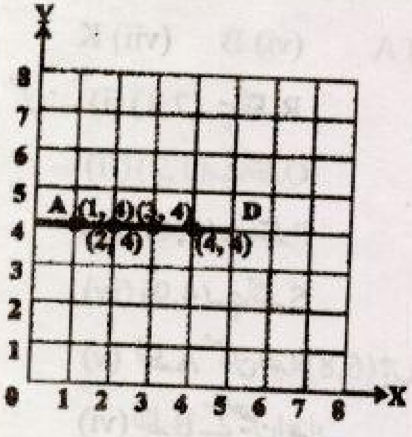
یہاں سبھی نقطے ایک ہی خط PS پر ہیں



یہاں سبھی نقطے ایک ہی خط y ساق پر ہیں



یہاں سبھی نقطے ایک ہی خط HF پر واقع ہیں



یہاں سبھی نقطے ایک ہی خط AD پر ہیں
یہ X-ساق کے متوازی ہے

اوپر کے مثالوں میں درج نقطوں کو ملانے پر حاصل گراف ایک خط مستقیم حاصل ہوتا ہے۔ ایسے گرافوں کو خطی گراف (Linear graph) کہتے ہیں۔

15.3 گراف کے مختلف استعمال

آپنے براہ راست اور بالواسطہ تناسب کے باب میں سیکھا تھا کہ ایک عدد دوسرے عدد کو متاثر کرتا ہے۔ چینی کی زیادہ کھپت چینی پر خرچ کو متاثر کرتی ہے۔ بجلی کا بل استعمال کی گئی بجلی کی مقدار پر منحصر کرتا ہے۔ ہم کہتے ہیں کہ بجلی کی مقدار ایک آزاد متحرک (Independent Variable) جبکہ بجلی کا بل ایک منحصر متحرک (dependent variable) ہے۔ ایسے اعداد کے تعلق کو ہم گراف کے ذریعہ بھی نمایاں کر سکتے ہیں۔ آگے ہم ضلع۔ احاطہ گراف، وقت دوری گراف وغیرہ مختلف حالات کو گراف سے دکھائینگے۔

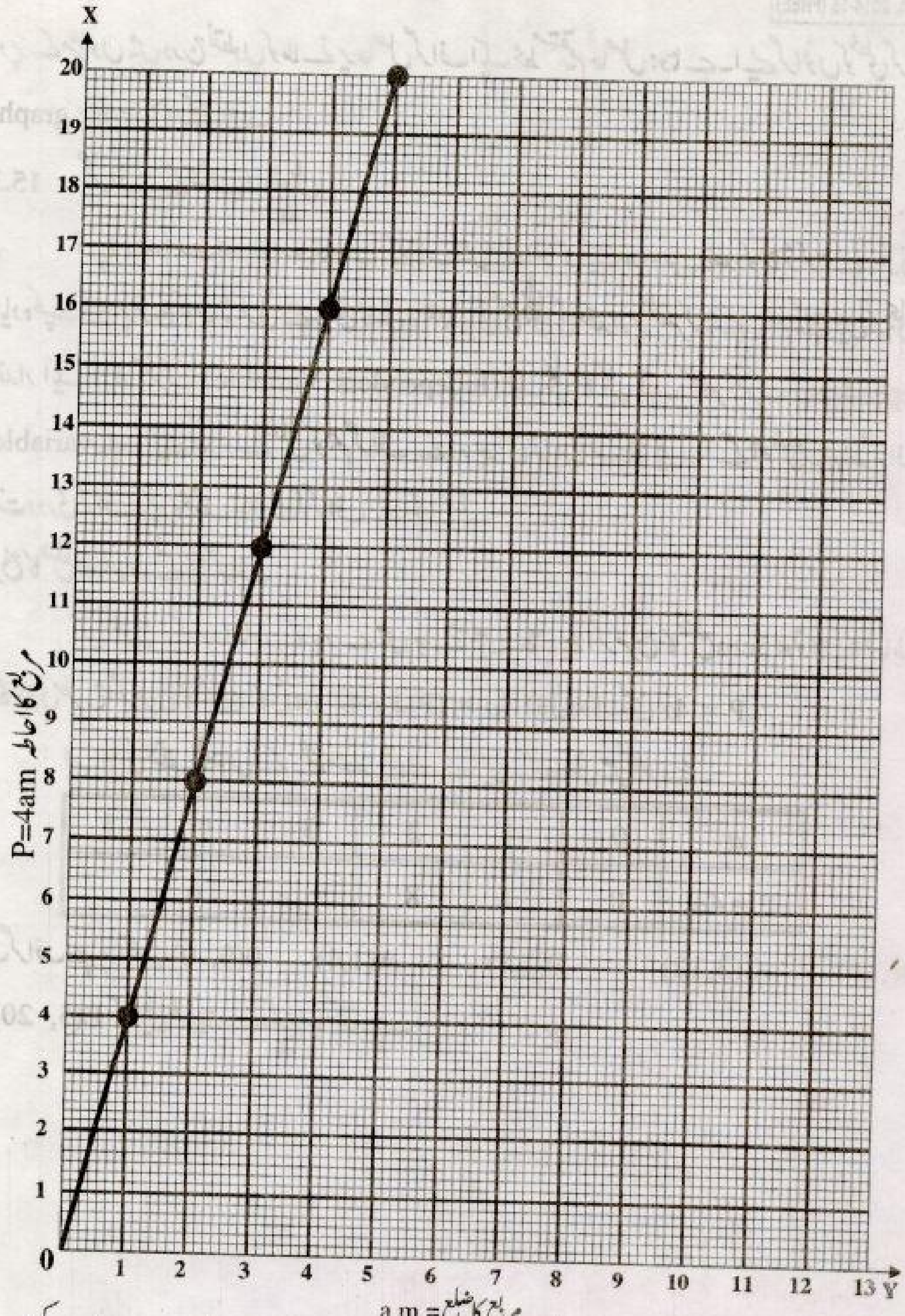
مربع کا ضلع اور احاطہ کے بیچ گراف

آپ مربع کے اور احاطہ کے بارے میں جانتے ہیں۔ بتائیے اگر مربع کا ضلع 5cm ہو تو اس کا احاطہ کیا ہوگا؟ اسی طرح اگر مربع کا ضلع a اکائی ہو تو اسکا احاطہ (P) $= 4a$ اکائی ہوگا۔ یعنی $P = 4a$۔

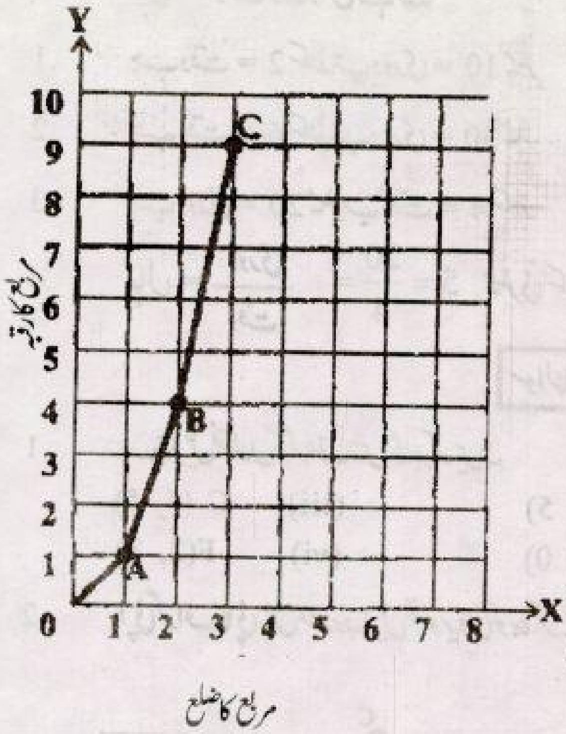
اب a کی مختلف قیمتوں کے لئے متعلقہ قیمت سے ذیل کے جدول میں بھریئے۔

a	0	1	2	3	4	5
$P = 4a$	0	4	8	....	16	....

اب گراف پیپر پر نقطوں 0(0, 0) A(1,4) B(2,8) C(3,12) D(,16) اور E(5, 20) کو ذیل طریقہ سے دکھایا جاسکتا ہے۔



اسی طرح آپ مثلث متساوی الاضلاع کے لئے احاطہ اور رقبہ کے لئے الگ الگ جدول بنا گراف کھینچئے۔



مثال۔5 مربع کے ضلع اور رقبہ کے بیچ گراف کھینچیں۔اس میں دکھائیں کہ ضلع کی لمبائی 3 اکائی رہنے پر رقبہ کیا ہوگا؟

حل: ہم جانتے ہیں کہ مربع کا رقبہ = ^{2}(ضلع)

یا $A = (x)^2$

اسلئے x کے مختلف قیمتوں سے متعلق A کی قیمت ذیل کی طرح ہوگی۔

$x = 0 \Rightarrow A = 0^2 = 0$

$x = 1 \Rightarrow A = 1^2 = 1$

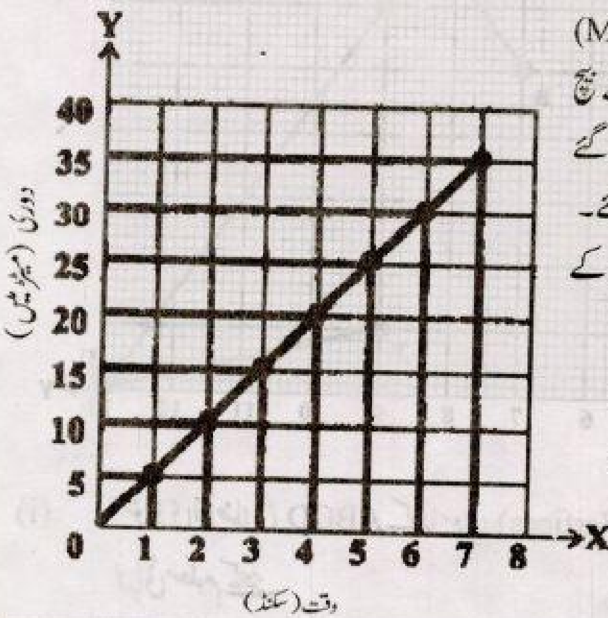
$x = 2 \Rightarrow A = 2^2 = 1$

$x = 3 \Rightarrow A = 3^2 = 9$

اسلئے O(0, 0), A(1, 1), B(2, 4), C(3, 9) نقطوں کو گراف پر دکھاتے ہیں۔اسطرح ضلع 3 اکائی رہنے پر رقبہ 9 مربع اکائی ہے۔

15.4 گراف کو پڑھنا (Readings of Graph)

اب تک ہم نے مربع کے ضلع اور احاطہ، مربع کے ضلع اور رقبہ کے بیچ گراف کھینچا۔اسی طرح اعداد کے مضروب جیسے (3 کا مضروب 3, = (Multiple) .... ,12 ,9 ,6) وقت اور سود مفرد وغیرہ کے بیچ گراف کھینچ سکتے ہیں۔اب ہم دیکھیں کہ دیئے گئے گراف کو کیسے پڑھ سکتے ہیں؟ ذیل کی مثالوں کو دیکھئے۔



مثال۔6 گراف کو بغور دیکھئے اور ذیل سوالات کے جواب دیجئے۔

1. 2 سکنڈ میں طئے کی گئی دوری کیا ہے؟
2. 6 سکنڈ میں طے کی گئی دوری کیا ہے؟
3. 20 میٹر جانے میں لگا وقت کتنا ہے؟
4. سواری کی چال فی سکنڈ کیا ہے؟

حل: گراف سے واضح ہے کہ۔

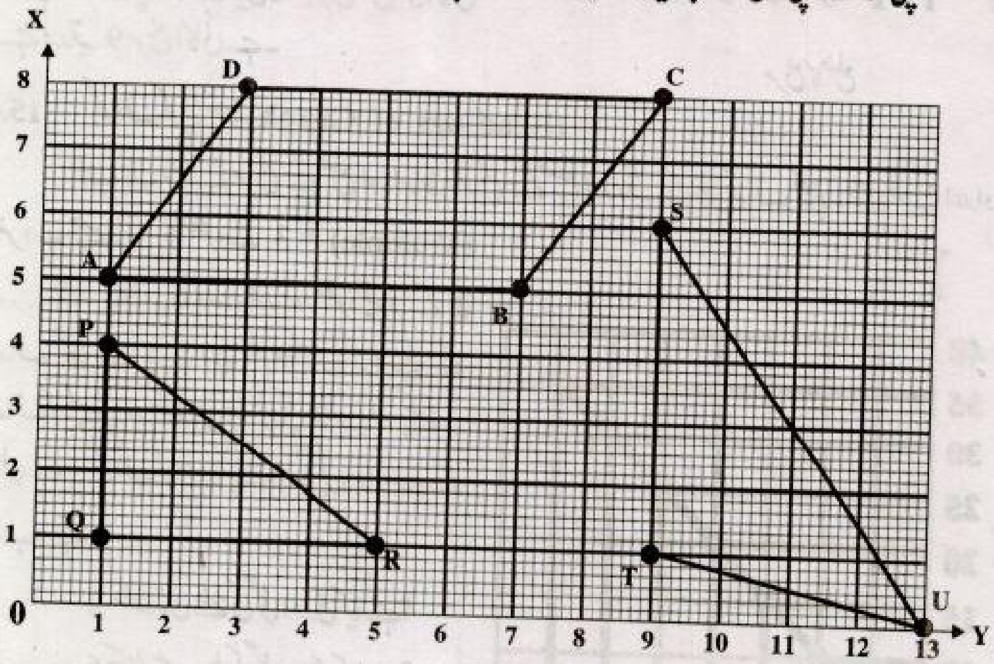
1. جب وقت = 2 سکنڈ تب دوری = 10 میٹر
2. جب وقت = 6 سکنڈ تب دوری = 30 میٹر
3. جب دوری = 20 میٹر تب وقت = 4 سکنڈ
4. چال = $\frac{\text{دوری}}{\text{وقت}} = \frac{20}{4} = 5$ میٹر فی سکنڈ

سوالنامہ

1. درج ذیل نقطوں کو گراف میں ظاہر کریں۔

(i) A(5, 3) (ii) B(3, 5) (iii) C (4, 5)
(iv) D(0, 5) (v) E(5, 0) (vi) F(2, 3)

2. اپنی گراف کاپی میں مندرجہ ذیل تصویروں کو بنا کر نیچے دیے گئے سوالوں کے جواب دیجیے۔



(i) متوازی الاضلاع ABCD کے راسوں (Vertices) کے معین اعداد لکھیے اور ضلع AB اور CD کی لمبائی معلوم کیجیے۔

(ii) ΔPQR کے راسوں کے معین اعداد معلوم کیجئے اور ضلع PQ اور QR کی لمبائی معلوم کیجئے۔

(iii) دائرہ کے مرکز M کے معین اعداد معلوم کیجئے اور اسکا قطر (Diameter) معلوم کیجئے۔

(iv) ΔSTU کے راسوں کے معین اعداد معلوم کیجئے۔

3. مندرجہ ذیل جدول کے مطابق وقت اور سود مفرد کے بیچ گراف کھینچئے۔

وقت	1 سال	2 سال	3 سال	4 سال
سود مفرد	60 روپیہ	120 روپیہ	180 روپیہ	240 روپیہ

4. ایک ریل گاڑی 80 km فی گھنٹہ کی مستقل چال سے چل رہی ہے۔ مختلف اوقات میں طئے کی گئی متعلقہ دوری کے بیچ گراف کھینچئے۔

5. صحیح یا غلط لکھئے۔

(i) کسی نقطہ کے مقام کو عددی جوڑے کے ذریعہ دکھایا جاتا ہے۔

(ii) عددی جوڑے کو نقطہ کا معین اعداد کہتے ہیں۔

(iii) x ساق پر y کا عدد معین صفر اور y- ساق پر x کا معین عدد صفر ہوتا ہے۔

(iv) ابتدائی نقطہ کے معین اعداد (0,0) ہوتے ہیں۔

ہم نے سیکھا

1. کسی نقطہ کے مقام کو عددی جوڑے کے ذریعہ دکھایا جاتا ہے۔
2. جہاں x اور y ساق (axes) ایک دوسرے کو کاٹتے ہیں اُسے ابتدائی نقطہ (origin) کہا جاتا ہے۔
3. آسانی کے لئے افقی خط پر آنے والے عدد کو پہلے اور عمودی خط پر آنے والے عدد کو بعد میں لکھتے ہیں۔
4. x- ساق پر y کا معین عدد اور y- ساق پر x کا معین عدد صفر ہوتا ہے۔
5. جب معین اعداد کے نقطوں کو ملانے پر خط مستقیم حاصل ہو تو یہ خطی گراف کہلاتا ہے۔ اسمیں دونوں متحرکوں (variables) میں بلاواسطہ یا سیدھے تناسب کا تعلق ہوتا ہے۔

*